

4. Schwingungen

4. Schwingungen	1
4.1 Beispiele	2
4.2 Der Harmonische Oszillator	4
4.2.1 Harmonische Schwingungen	4
4.2.2 Das Federpendel	4
4.2.3 Gesamtenergie der freien Schwingung	7
4.2.4 Ergänzungen	8
4.3 Schwingungsfähige Systeme	12
4.3.1 Torsionsschwinger	12
4.3.2 Das mathematische Pendel	12
4.3.3 Das physikalische Pendel	13
4.3.4 Flüssigkeitspendel im U-Rohr	14
4.3.5 Elektromagnetischer Schwingkreis	15
4.4 Freie, gedämpfte Schwingungen	17
4.4.1 Dämpfung	17
4.4.2 Schwache Dämpfung (Schwingfall)	19
4.4.3 Überkritische Dämpfung (Kriechfall)	21
4.4.4 Der aperiodische Grenzfall	21
4.5 Erzwungene Schwingungen	22
4.5.1 Bewegungsgleichung	22
4.5.2 Stationäre Lösung	23
4.5.3 In- und Außer-Phase-Anteil	24
4.5.4 Resonante Anregung	25
4.5.5 Absolutbetrag und Phase	26
4.5.6 Einschwingvorgang	27
4.5.7 Zusammenfassung	28
4.6 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden	29
4.6.1 Das Doppelpendel	29
4.6.2 Eigenschwingungen	30
4.6.3 Schwebung	31
4.6.4 Ergänzung: Gekoppelte elektrische Schwingkreise	32
4.6.5 Ergänzung: Die lineare Kette	34
4.6.6 Schwingungen mehrdimensionaler Systeme	35

4.1 Beispiele

Das klassische Beispiel eines schwingenden Systems ist das Pendel.

Versuch III.2: Federpendel

Definition: Schwingung ist eine periodische Zustandsänderung, d.h. eine Zeitabhängigkeit, welche nach einer Periode T in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt: $q(t + T) = q(t)$.

Die Größe q kann eine mechanische, elektrische, chemische, thermische ... Größe sein.

Meist zeigen verschiedene Größen (z.B. Ort, Geschwindigkeit) die gleiche Zeitabhängigkeit. Schwingungen entstehen immer dann, wenn einzelne Komponenten (mechanische, elektrische etc.) nicht starr aneinander gekoppelt sind. Wie sich das System während der Periode verhält spielt hierbei zunächst keine Rolle.

Schwingungen sind in vielen Bereichen wichtig.

Beispiele:

Zeitmessungen:

Standuhr: mathematisches Pendel

Armbanduhr: Unruh, Schwingquarz

Atomuhr: Schwingungen der Elektronenhülle von Atomen

Elektronik (Telekommunikation, Digitalelektronik)

Optik

Naturerscheinungen, z.B. Ebbe und Flut

Praktisch alle Systeme zeigen Schwingungen, die allerdings manchmal stören. Dann versucht man, deren Einfluss zu reduzieren.

Folie: Schwingungsdämpfung an Hochfeldmagnet

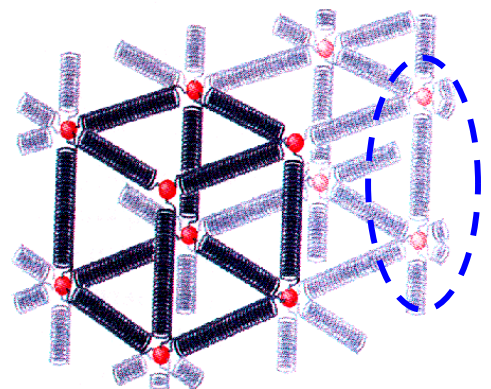
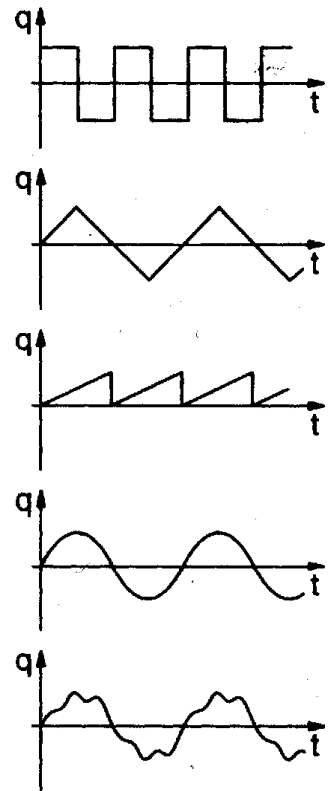
In allen mikroskopischen Systemen spielen Schwingungen eine große Rolle. So werden Atome in Molekülen, und diese in Flüssigkeiten und Festkörpern durch Kräfte zusammengehalten, die qualitativ wie Federn wirken. Unter dem Einfluss dieser Bindungskräfte führen die Teilchen mechanische Schwingungen um ihre Gleichgewichtslagen aus.

Molekülschwingungen

Nachweis mit der Infrarot-Spektroskopie.

Folie: IR-Spektroskopie

Gitterschwingungen in Festkörpern.



Andere Arten von schwingungsfähigen Systemen:

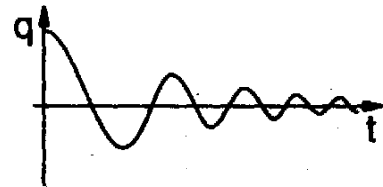
- Oszillierende chemische Reaktionen: (z.B. Belousov-Zhabotinsky-Reaktion)
Wichtig auch hier: die Existenz einer Rückkopplung
www.educeth.ch/chemie/diverses/orderchaos/reaktionen/bz/bz-literatur.html
- Beute-Jäger-Beziehungen fallen zumindest näherungsweise in diese Klasse.
Hier spielt zwar Rückkopplung eine wesentliche Rolle, aber die Zyklen verlaufen nicht streng periodisch.
- Elektromagnetische Wellen (Radio-, Mikrowellen, Licht, Röntgenstrahlen, ...)
Bei der Erzeugung von Licht gehen die Schwingungen von atomaren Dipolen auf das elektromagnetische Feld über und beim Nachweis, also auch im Auge, überträgt das elektromagnetische Feld diese Schwingungen wieder auf ein materielles System, in diesem Fall die Sinneszellen der Netzhaut.
Wellen treten übrigens immer dann auf, wenn man eine Vielzahl von schwingungsfähigen Systemen aneinander koppelt. Dazu gibt es noch ein eigenes Kapitel.

Klassifikation von Schwingungen

freie Schwingungen:	einmalige Anregung (d.h. Zufuhr von Energie) und weitere Entwicklung ohne äußeren Einfluss
erzwungene Schwingungen:	Anregung durch eine periodische äußere Kraft.

Folie: Abb. 5-2 aus HMS

ungedämpfte Schwingungen sind Idealisierungen



gedämpfte Schwingungen Energieabgabe an Umgebung. Solche Schwingungen sind nicht vollständig periodisch.

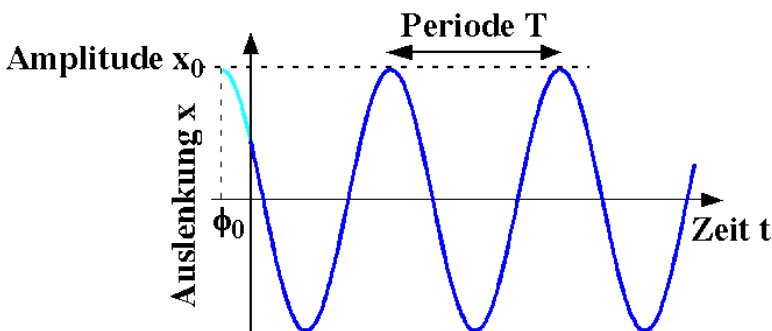
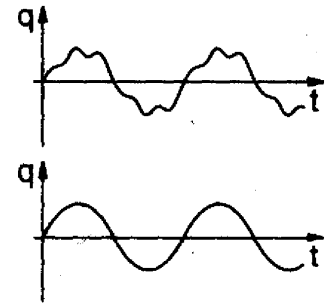
Die mathematische Behandlung dieser großen Zahl unterschiedlicher Phänomene ist identisch; sie werden deshalb hier gemeinsam diskutiert.

Die Resultate, die uns die Diskussion des schwingenden Pendels liefert, können wir direkt auf viele andere Systeme übertragen. Es ist deshalb nützlich, zunächst einige Eigenschaften zu diskutieren, die allen schwingenden Systemen gemeinsam sind.

4.2 Der Harmonische Oszillator

4.2.1 Harmonische Schwingungen

Die Zeitabhängigkeit einer allgemeinen Schwingung ist beliebig, abgesehen von der Periodizität. Die mathematische Behandlung solcher Systeme kann etwas schwierig werden. Wir beschränken uns zunächst auf Systeme, bei denen die Zeitabhängigkeit durch eine Sin- oder Cos- Funktion beschrieben werden kann. Eine solche Zeitabhängigkeit wird als harmonisch bezeichnet.



Allgemeine Zeitabhängigkeit einer harmonischen Schwingung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ [s^{-1}]

Frequenz $\nu = 1/T$ [Hz]

Schwingungsperiode T [s]

Anfangsphase
(= Nullphasenwinkel) φ_0

Folie: Kreisbewegung und harmonische Schwingung, Abb. 5-3 aus HMS

Eine harmonische Oszillation erhält man z.B. wenn man eine Komponente einer Kreisbewegung betrachtet. Die horizontale Position eines rotierenden Zeigers kann z.B. als $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ geschrieben werden, die vertikale Position als

$$y_{\pm}(t) = \pm x_0 \sin(\omega t), \text{ z.B. } y_{-}(t) = -x_0 \sin(\omega t) = x_0 \cos(\omega t + \pi/2).$$

Das Vorzeichen korrespondiert zur Drehrichtung (+, mathematisch positiv, gegen den Uhrzeigersinn bzw. (-, mathematisch negativ, im Uhrzeigersinn).

Ein Beispiel für eine Kreisbewegung, die wir als Schwingung beobachten, sind Ebbe und Flut.

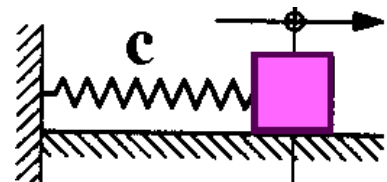
4.2.2 Das Federpendel

Versuch III.2: Federpendel

Annahmen: keine Reibung

masselose Feder

Hooke'sches Gesetz gilt



Rücktreibende Kraft: $F = -c y$

mit $c =$ Federkonstante

Trägheitskraft: $F = m a$

mit $a =$ Beschleunigung

Damit erhalten wir für die Masse eine Bewegungsgleichung

$$m a = - c y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Dies ist eine Differentialgleichung (= DGL). Eigenschaften dieser DGL:

- eindimensional (eine Variable)
- linear (Variablen und deren Ableitung kommen nur in der ersten Potenz vor)
- zweiter Ordnung (sie enthält keine höheren als die zweite Ableitung)
- konstante Koeffizienten (d.h. c und m sind nicht explizit zeitabhängig)

Die Rückstellkraft ist immer der Auslenkung entgegengerichtet und proportional zu ihr. Bei maximaler Auslenkung ist auch die Kraft maximal, bei verschwindender Auslenkung verschwindet die Kraft.

Diese DGL zeigt, was die Voraussetzungen für ein schwingungsfähiges System sind:

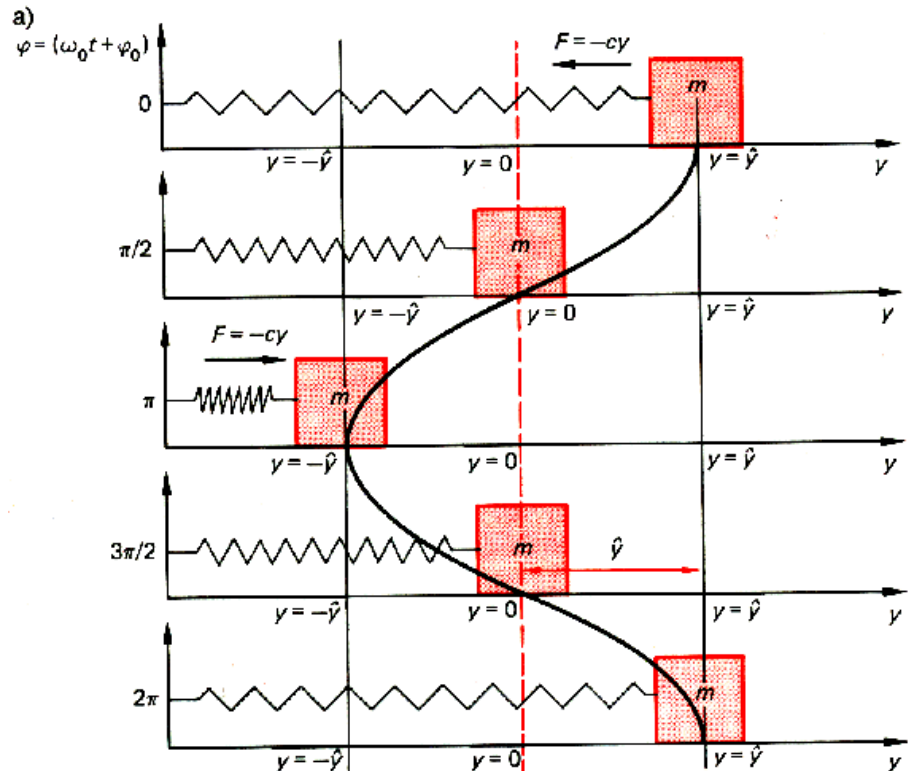
- Rückstellkräfte: Diese treiben ausgelenkte Systeme in die Gleichgewichtslage zurück.
- Trägheit: Diese sorgt dafür, dass das System nicht nur die Gleichgewichtslage erreicht, sondern über diese hinausschwingt.

Löse: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} y = 0$ (*)

Lösungen von DGL sind Gleichungen, die man in die DGL einsetzt. Dies liefert dann Bedingungen für die Koeffizienten der DGL.

Lösungen kann man raten und durch Einsetzen überprüfen. Damit ist aber noch nicht klar, ob man alle Lösungen einer DGL erfasst hat. → Mathematik

Wir betrachten hier die freie Schwingung: das System wird zunächst ausgelenkt und dann sich selber überlassen.



Ansatz: $y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ mit $\omega_0 = \text{Frequenz}$
 $x_0 = \text{Amplitude}$
 $\varphi = \text{Phase}$

$$\frac{d}{dt} y(t) = v(t) = -y_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{Geschwindigkeit}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = a(t) = -y_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{Beschleunigung}$$

Einsetzen in (*) liefert $-y_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{c}{m} y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$

eine Bedingung für die Koeffizienten $-\omega_0^2 + \frac{c}{m} = 0$

oder für die Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ bzw. die Periode $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$.

Die dem Schwingungssystem "eigene" Frequenz ω_0 heißt Eigenfrequenz.

Die Amplitude y_0 und die Phase φ sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt:

Anfangs-Ort: $y(0) = y_0 \cos(\varphi)$

Anfangsgeschwindigkeit $\dot{y}(0) = v_0 = -y_0 \omega_0 \sin(\varphi)$.

Dieses Gleichungssystem kann aufgelöst werden nach den Parametern y_0, φ :

$$y_0 = x(0) / \cos(\varphi) \quad \varphi = \tan^{-1}(-v_0/(y(0)\omega_0)) .$$

$\varphi = 0$: Schwingung besitzt bei $t=0$ die maximale Auslenkung, $y_{\max} = y_0$

$\varphi = -90^\circ = -\pi/2$ Auslenkung ist minimal $y(0) = 0$, und das System bewegt sich in Richtung positive Auslenkung, d.h. es ist nach einer Viertel Periode bei maximaler Auslenkung,

$\varphi = 90^\circ = \pi/2$ $y(0) = 0$, System bewegt sich in Richtung negativer Auslenkung

Da das System periodisch ist, besitzen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung alle die gleiche Frequenz, Aber es ist interessant, die Amplituden und Phasen von $y(t), v(t)$ und $a(t)$ zu vergleichen. Die Bewegung der Massen ist charakterisiert durch folgende

Amplituden

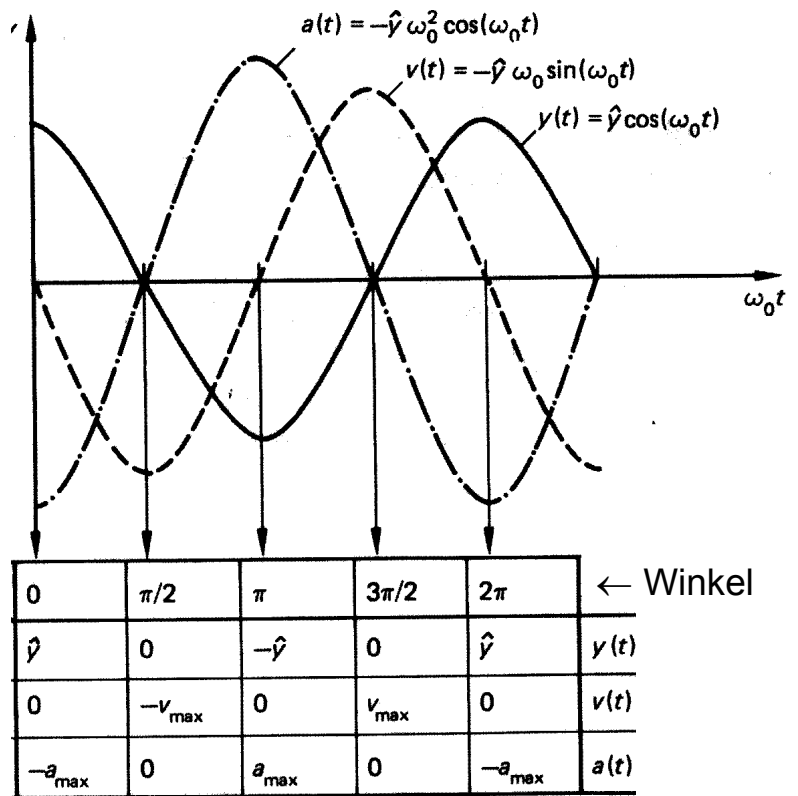
$$y_{\max} = y_0 \quad (= \hat{y} \text{ im Bild})$$

$$v_{\max} = y_0 \omega_0$$

$$a_{\max} = y_0 \omega_0^2$$

$v(t)$ ist in Bezug auf $x(t)$ um 90° außer Phase

$a(t)$ ist um weitere 90° , d.h. in Bezug auf $\dot{y}(t)$ um 180° außer Phase



4.2.3 Gesamtenergie der freien Schwingung

Das Federpendel enthält Energie in zwei unterschiedlichen Formen: kinetische und potentielle Energie. Die potentielle Energie ist in der Feder gespeichert:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} c y^2 = \frac{1}{2} c y_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

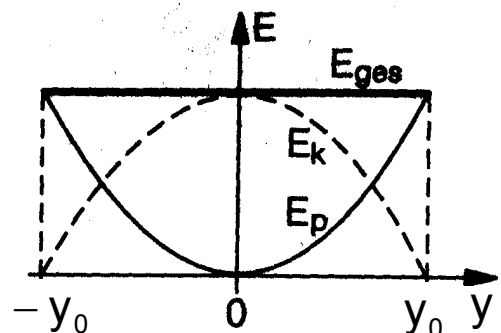
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 y_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} c y_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Mit $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ folgt

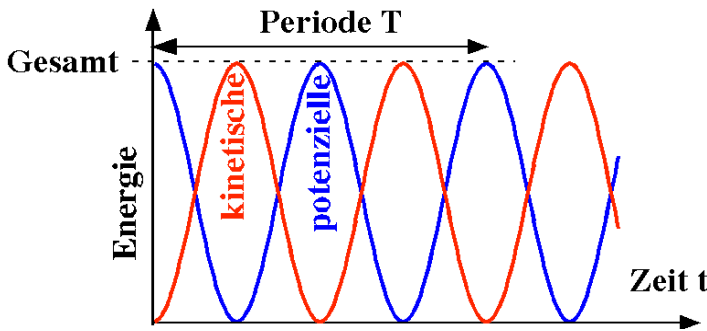
$$\text{Gesamtenergie } E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} c y_0^2 = \text{konstant}$$

Dies ist Ausdruck der Energieerhaltung.

In der Ruhelage ist die Feder entspannt, die potentielle Energie verschwindet somit, während die Geschwindigkeit und damit die kinetische Energie maximal ist. Bei der maximalen Auslenkung ist hingegen die Geschwindigkeit Null, die kinetische Energie verschwindet, während die potentielle Energie maximal wird.



Die einzelnen Beiträge zur Energie sind zeitabhängig, während die Gesamt-



energie konstant bleibt. Die Energie wird somit zwischen einzelnen Reservoirs periodisch ausgetauscht, wobei die Periode des Energieaustausches halb so groß ist wie die Periode der Auslenkung. Dieser Energieaustausch tritt bei allen schwingenden Systemen auf.

4.2.4 Ergänzungen

Der harmonische Oszillator ist einerseits ein attraktives Modellsystem, weil er analytisch leicht lösbar ist. Andererseits spielt er auch in der Natur eine wichtige Rolle. Der Grund dafür liegt darin, dass sich die potentielle Energie sehr vieler Systeme in der Nähe ihres Gleichgewichts in guter Näherung durch eine Parabel annähern lässt.

Potentialentwicklung

Das sieht man, wenn man die Energie in der Nähe eines lokalen Minimums als Taylor-Reihe entwickelt:

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + ..$$

Am Gleichgewichtspunkt x_0 ist der erste Term der einzige, der nicht verschwindet. Mit zunehmender Entfernung vom lokalen Minimum spielen Terme höherer Ordnung eine zunehmende Rolle, während in dessen Nähe nur die Terme niedriger Ordnung berücksichtigt werden müssen.

Der erste Term legt nur den Energienullpunkt fest und hat keinen Einfluss auf die Dynamik des Systems. Der lineare Term der Entwicklung verschwindet im Gleichgewichtspunkt per Definitionem. Wenn der quadratische Term nicht verschwindet, so ist in der Nähe des Minimums immer ein Bereich vorhanden, in dem er den größten Beitrag zur Dynamik des Systems liefert. Die Forderung, dass das System sich in einem stabilen Gleichgewicht befindet bedeutet dann, dass die Energie ein Minimum besitzt, dass also die zweite Ableitung positiv ist.

Die rücktreibende Kraft $F(x)$ erhält man aus der ersten Ableitung der obigen Entwicklung

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \text{höhere Terme}$$

Durch Vergleich mit der Bewegungsgleichung finden wir

$$F(x) = -c(x - x_0) = - \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Damit ist die dem Potential entsprechende

$$\text{"Federkonstante"} \quad c = m \omega_0^2 = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

Die Resonanzfrequenz ist somit durch die Masse des Oszillators und die zweite Ableitung des Potentials am Gleichgewichtspunkt bestimmt.

Lennard-Jones Potential

Ein Beispiel eines solchen Potentials ist das Lennard-Jones Potential, welches als

$$U_{LJ}(x) = 4 \varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

definiert ist. Die Konstanten ε und σ bestimmen Position und Tiefe des Minimums. Dieses Potential beschreibt die Wechselwirkung zwischen Atomen oder Molekülen, die durch die Van der Waals Wechselwirkung aneinander gebunden sind. Für kurze Abstände überwiegt die Abstoßung, während für große Abstände die Wechselwirkung mit $1/x^6$ abfällt. Dazwischen gibt es ein Minimum der potentiellen Energie. Die Position dieses Minimums bestimmt z.B. den Abstand zwischen Molekülen in einem Kristall und damit dessen Dichte.

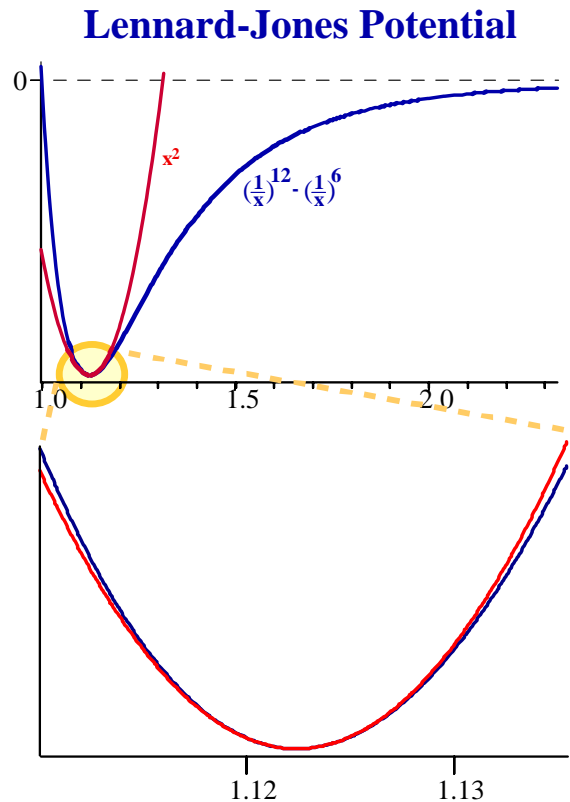
Obwohl das Potential sicher nicht die Form einer Parabel besitzt, kann man es doch in der Nähe des Minimums durch eine Parabel annähern. Je näher man sich dem Minimum nähert, desto besser ist die Näherung.

Dies zeigt, dass sich die meisten Systeme in der Nähe des Gleichgewichts wie ein harmonischer Oszillator verhalten.

Anharmonizität

Für größere Auslenkungen werden natürlich die Terme höherer Ordnung wichtiger und die Kräfte werden nichtlinear, d.h. der Oszillator wird anharmonisch. Zu den wichtigsten damit im Zusammenhang stehenden Abweichungen gehört, dass für große Auslenkungen die Frequenz von der Auslenkung abhängt.

Diese Abweichung kann man sich z.B. anhand eines Kreispendels klar machen. Für kleine Auslenkungen ist die Schwingungsperiode T_0 konstant, für größere



Auslenkungen wird sie größer. Beispielsweise ist sie für eine Amplitude von 160° doppelt so lang also $2T_0$. Als Extremfall kann man sich vorstellen, dass das Pendel senkrecht nach oben gerichtet ist, so dass es in dieser Position bleibt - seine Schwingungsperiode wäre dann unendlich lang.

Chaos

Versuch I.62a: chaotisches Doppelpendel

Nicht immer sind Schwingungen periodisch. Sind die Kräfte z.B. eine nichtlineare Funktion der Auslenkung, so kann die Bewegung nichtperiodisch werden. Man spricht in solchen Fällen von nichtlinearer Dynamik oder Chaos. Man kann zeigen, dass es für solche Systeme nicht möglich ist, präzise Angaben über die zeitliche Entwicklung zu machen. Sie wird im Rahmen dieser Einführungsvorlesung nicht weiter diskutiert, obwohl sie eine wichtige Rolle spielt. Man kann zeigen, dass sich das Wetter chaotisch verhält. Es ist deshalb prinzipiell nicht möglich, exakte langfristige Wettervorhersagen zu erstellen. Das Problem liegt darin, dass die Anforderungen an die Präzision der Anfangsdaten (z.B. Windgeschwindigkeiten) exponentiell mit der Prognosendauer wächst. Gibt man diese Daten im Rahmen von Modellen vor, so übernehmen Rundungsfehler die Rolle von Messfehlern. Schade: Denn eigentlich verhält sich dieses "Chaos" deterministisch, d.h. in einer vorherbestimmten Weise.

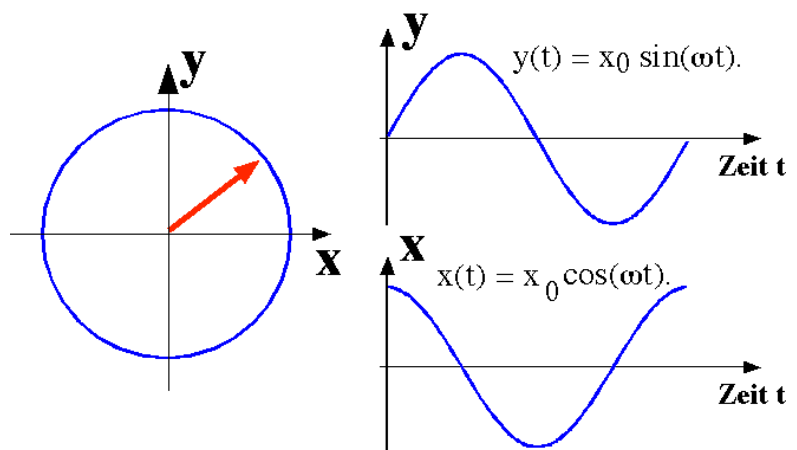
Komplexe Amplitude

Auf den engen Zusammenhang zwischen harmonischen Oszillatoren und Kreisbewegung wurde bereits in der Einleitung hingewiesen.

Die beiden Koordinaten können geschrieben werden als

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

$$y(t) = x_0 \sin(\omega t).$$



Dabei ist es nicht notwendig, die beiden Koordinaten getrennt zu behandeln; man kann sie über die Euler'sche Beziehung zu einer komplexen Variablen kombinieren.

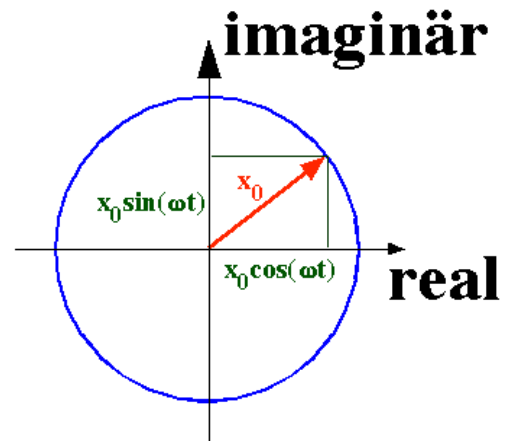
Dazu wird die Variable x mit dem Realteil der komplexen Variablen identifiziert, y mit dem Imaginärteil. Gemäß der Euler'schen Formel

$$x_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = x_0 \{ \cos(\omega t + \varphi_0) + i \sin(\omega t + \varphi_0) \}$$

Damit lässt sich mathematisch leichter umgehen. So ist die Ableitung

$$\frac{d}{dt} e^{i(\omega t + \varphi_0)} = i\omega e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

proportional zur Funktion selbst.



4.3 Schwingungsfähige Systeme

Schwingungen erhält man immer dann, wenn die Kraft der Auslenkung entgegengerichtet ist. Ist sie außerdem proportional zur Kraft, so ergibt sich eine harmonische Schwingung. Das hatten wir für das Federpendel mit $\ddot{y} + \omega_0 y = 0$ und $\omega_0 = c/m$ ausführlich diskutiert. Wir behandeln nun einige weitere Pendel als Beispiele:

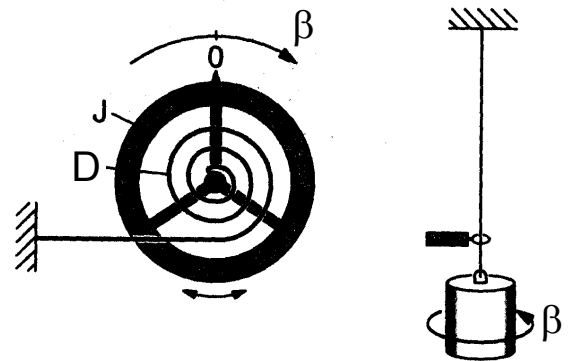
- Mathematisches Pendel
- Torsionspendel
- Physikalisches Pendel
- Flüssigkeitspendel

4.3.1 Torsionsschwinger

Ein Torsionsschwinger oder Drehpendel kann sich um eine Achse drehen, wobei eine Rückstellkraft wirkt, die proportional zur Auslenkung β ist. Für das Drehmoment gilt:

$$M = J \ddot{\beta} = - D \beta .$$

- Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse: J
- Winkelrichtgröße der Spiralfeder (Unruh): D



Folie: Abb. 5-7 aus HMS, Struktur der Differentialgleichung

→ Schwingung mit einer Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$

Diese Beziehung kann man beispielsweise dazu verwenden, um Trägheitsmomente zu messen: $J = D/\omega^2$. Die Winkelrichtgröße D wird dabei zunächst mit Hilfe eines Körpers mit bekanntem Massenträgheitsmoment bestimmt, danach ermittelt man die Schwingungsdauer des Körpers mit der unbekanntem Masse.

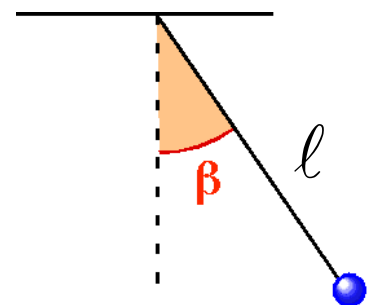
4.3.2 Das mathematische Pendel

Annahmen:

- punktförmige Masse m
- masselose, unelastische Schnur der Länge ℓ
- Auslenkung der Masse um den Winkel β

$$\text{Trägheitskraft } F = m a = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d}{dt}(\dot{\beta} \ell) = m \ell \ddot{\beta}$$

$$\text{Rückstellkraft } F_R = - m g \sin \beta$$



Die Bewegungsgleichung $m \ell \ddot{\beta} = -m g \sin \beta$ ist nichtlinear.

Aber für kleine Auslenkungen gilt $\sin \beta \approx \beta - \frac{1}{3!}\beta^3 + \frac{1}{5!}\beta^5 - \frac{1}{7!}\beta^7 + \dots \approx \beta$.

Diese Näherung liefert eine DGL für einen harmonischen Oszillator $\ddot{\beta} = -\beta \frac{g}{\ell}$

Diese DGL hat wieder die gleiche Struktur wie die des Federpendels.

Die Frequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ ist unabhängig von der Masse des Pendels.

Versuch I.21: Ebenes Fadenpendel, Schwingungsdauer

Länge des Fadens	Schwingungsdauer
$\ell = 1 \text{ m}$	$T = 2\pi(1 / 9,81)^{1/2} \text{ s} = 2,0 \text{ s}$
$\ell = 0,25 \text{ m}$	$T = 1,0 \text{ s}$

Dieser einfache Zusammenhang, und die Tatsache, dass nur die Länge des Pendels, nicht aber die Masse an dessen Ende, für seine Schwingungsdauer verantwortlich ist, war ein großer Erfolg der frühen physikalischen Forschung.

Die Schwingungsdauer ist in dieser Näherung unabhängig von der Auslenkung. Verwendet man die Näherung $\sin \beta \sim \beta$ nicht, dann findet man eine Periode, die man als Reihenentwicklung in β schreiben kann. Bei einer Auslenkung von 30° beträgt der Fehler in T etwa 2 %; bei 10° beträgt er etwa 2 ‰.

4.3.3 Das physikalische Pendel

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der um einen Punkt A drehbar gelagert ist.

Am Schwerpunkt S greift die Schwerkraft $F_G = m g$ an.

Rücktreibendes Moment $M = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_G = (d \sin \beta) \cdot (m g)$

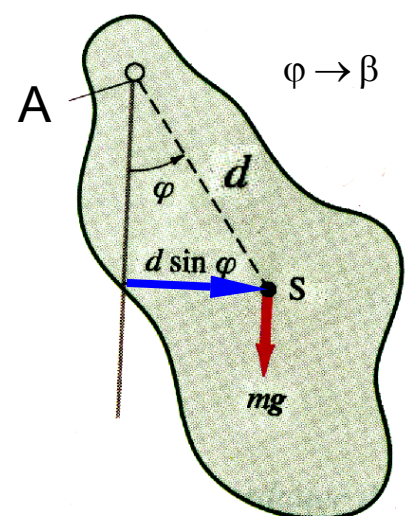
Drehmoment analog zur Trägheitskraft $M = J \ddot{\beta}$

$M = J \ddot{\beta} = -m g d \sin \beta$.

Mit der Näherung $\sin \beta \approx \beta$ für kleine Auslenkungen wird

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g d}{J}} = \sqrt{\frac{g}{\ell_{\text{red}}}}$$

mit der reduzierten Pendellänge $\ell_{\text{red}} = \frac{J}{m d}$



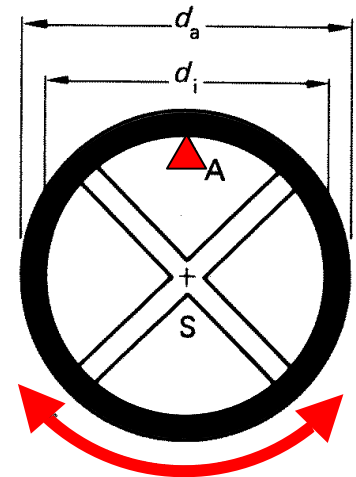
Dies entspricht der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels mit der Pendellänge l_{red} . Entgegen der Suggestion, die im Namen steckt, kann l_{red} auch größer als der Abstand zwischen Schwerpunkt und Aufhängung werden.

Versuch I.49a: Reifenpendel

Ein pendelnder Reifen sei im Punkt A am Rand aufgehängt. Der Reifen sei als dünn angenommen ($d_a \approx d_i$) und besitze eine Masse $m = 3 \text{ kg}$. Der Abstand zwischen Schwerpunkt und Aufhängung (der Radius des Reifens) betrage $d = 26 \text{ cm}$. Vernachlässigt man die Trägheit der Speichen, dann besitzt das Rad gemäß dem Steiner'schen Satz ein Trägheitsmoment

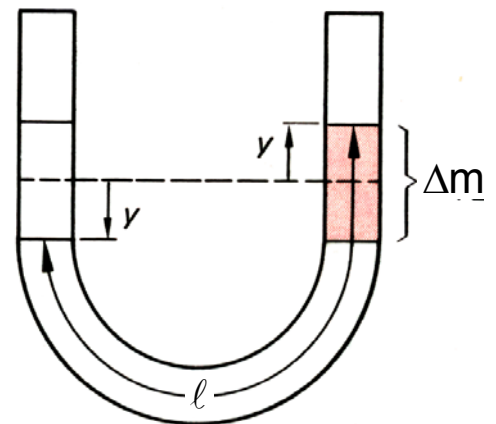
$$J_A = J_S + m d^2 = 2 m d^2$$

Somit ist die reduzierte Pendellänge $l_{\text{red}} = \frac{J_A}{m d} = 2d$ und der Schwingungsmittelpunkt liegt auf dem Umfang des Reifens. Mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2d}}$ entspricht dies einer Periode $T = 2\pi/\omega_0 = 1,45 \text{ s}$. Man sieht, dass auch beim physikalischen Pendel die Masse nicht explizit eingeht.



4.3.4 Flüssigkeitspendel im U-Rohr

Sind beide Enden auf gleicher Höhe so ist das System im Gleichgewicht. Ist die Flüssigkeitssäule verschoben, so entsteht eine rücktreibende Gewichtskraft. Die Bewegungsgleichung enthält die Gesamtmasse m der Flüssigkeit.



Trägheitskraft $F = m a$ mit $m = l A \rho$

- l Länge der Flüssigkeitssäule
- A Querschnittsfläche
- ρ Dichte.

Die rücktreibende Gewichtskraft $F_R = \Delta m g$

ist proportional zur Massendifferenz zwischen den beiden Armen, $\Delta m = \rho \Delta V = \rho 2 y A$.

Damit ist die Bewegungsgleichung $F = m a = l A \rho \ddot{y} = - 2 y A \rho g$

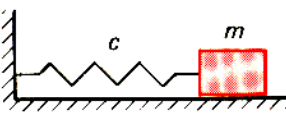
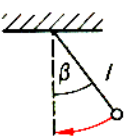
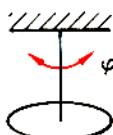
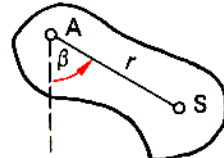
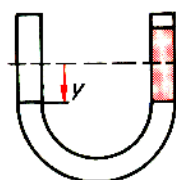
Mit $\ddot{y} = - 2 y \frac{g}{l}$ findet man also $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}$,

Die Kreisfrequenz ist unabhängig vom Querschnitt der Flüssigkeit sowie von ih-

rer Dichte! Sie entspricht einem mathematischen Pendel mit der Länge $\ell_{\text{red}} = \ell / 2$.

Ein interessantes Beispiel eines solchen Flüssigkeitspendels befindet sich an der kanadischen Ostküste: der nördliche Teil der Bay of Fundy zwischen New Brunswick und Nova Scotia bildet ein Flüssigkeitspendel mit einer natürlichen Periode von 12 Stunden. Damit wird es von den Gezeiten (Ebbe und Flut) resonant angeregt und man findet Tidenhübe von bis zu 16 m.
www.BayOfFundy.com

Im folgenden werden die behandelten, mechanisch schwingenden Systeme zusammengefasst. Die Bewegungsgleichung hat immer die Form $\ddot{y} = -\omega_0^2 y$. Unterschiede gibt es jeweils in der Bedeutung der Variablen y und in der Form von ω_0^2 .

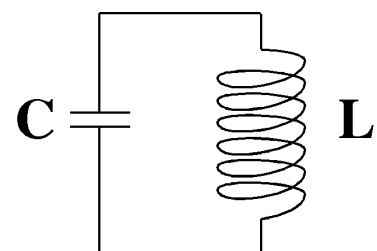
Schwingungssystem	Kraftansatz Differentialgleichung	ω_0
 Federpendel	$F = ma$ $-cy = m\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0$	$\sqrt{\frac{c}{m}}$
 mathematisches Pendel	$F = ma$ $-mg\beta = ml\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$
 Torsionspendel	$M = J_A a$ $-c^*\beta = J_A \ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{c^*}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{c^*}{J_A}}$
 physikalisches Pendel	$M = J_A a$ $-mgr\beta = J_A \ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{mgr}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{mgr}{J_A}}$
 Flüssigkeitspendel	$F = ma$ $-2Agy = m_{\text{ges}}\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{2A\rho g}{m_{\text{ges}}}y = 0$ $\ddot{y} + \frac{2g}{l}y = 0$	$\sqrt{\frac{2A\rho g}{m_{\text{ges}}}}$ $\sqrt{\frac{2g}{l}}$

4.3.5 Elektromagnetischer Schwingkreis

Das einfachste elektronische System, das Schwingungen ausführen kann, besteht aus einem Kondensator C und einer Spule L. Eine Bewegungsgleichung für die Schwingung erhält man aus der Maschenregel: Die Spannung über der Spule muss entgegengesetzt gleich der Spannung über dem Kondensator sein:

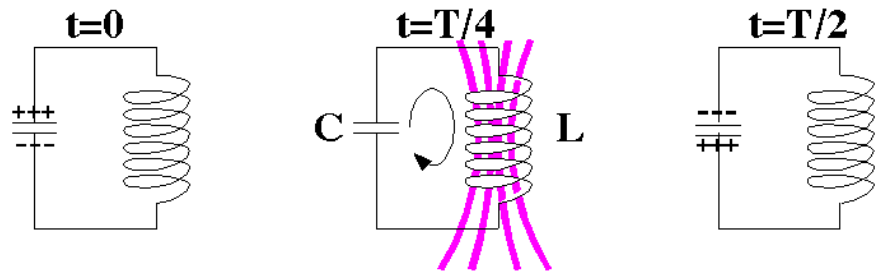
$$U_L + U_C = 0 = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Mit $I = dQ/dt$ erhält man $\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC}$



Die Kreisfrequenz beträgt somit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Wir können die Oszillation verfolgen, indem wir z.B. bei einem geladenen Kondensator anfangen, wobei der Strom verschwinden soll. Das System entwickelt sich dann wie



$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t).$$

Die Spannung über dem Kondensator führt zu einem Stromfluss durch die Spule, wobei deren Induktivität den Anstieg des Stromes beschränkt. Nach einer Viertelperiode ist der Kondensator entladen und der Strom durch die Spule auf ein Maximum angestiegen. Der Strom lädt jetzt den Kondensator umgekehrt auf. Dadurch entsteht eine Spannung, welche dem Stromfluss entgegenwirkt. Nach einer weiteren Viertelperiode ist der Stromfluss auf Null abgesunken, während der Kondensator umgekehrt geladen ist.

Folie: mechanische und elektromagnetische Schwinger, Abb. 5-19 aus HMS

In diesem System erhält man einen Austausch von Energie zwischen der elektrostatischen Energie im Kondensator und der magnetischen Energie in der Spule.

Bei $t = 0, \frac{1}{2}T, T, \dots$ ist die gesamte Energie im Kondensator gespeichert,

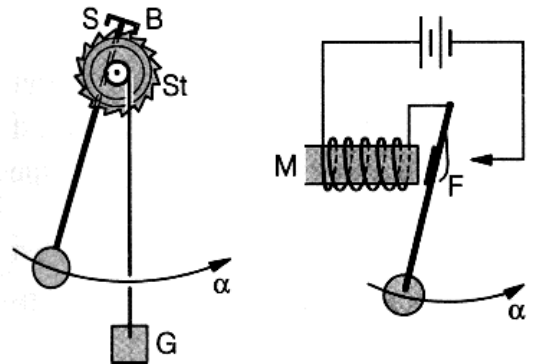
bei $t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \dots$ in der magnetischen Energie der Spule.

4.4 Freie, gedämpfte Schwingungen

4.4.1 Dämpfung

Wie bei jeder Bewegung gibt es bei Schwingungen auch dissipative Effekte, d.h. es wird Schwingungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt, so dass die Schwingungsamplitude im Laufe der Zeit abnimmt. Dies geschieht z.B. über Reibung oder den Luftwiderstand.

Um eine Schwingung permanent in Gang zu halten, muss von außen Energie zugeführt werden. Dies geschieht z.B. in einem Uhrwerk über ein Gewicht oder über eine Feder. In einer Klingel wird eine elektromagnetische Kraft verwendet, welche durch die mechanische Bewegung ein- und ausgeschaltet wird.



Die Reibungskraft (oder der Luftwiderstand) ist immer der Geschwindigkeit entgegengerichtet. Der Betrag kann

- unabhängig von der Geschwindigkeit sein (Roll- oder Gleitreibung) $|F_r| = \mu mg$
- proportional zur Geschwindigkeit (viskose Reibung) oder $F_r = -b v$
- proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit (Luftwiderstand): $F_r \propto -v^2$

Ergänzung: Geschwindigkeitsunabhängige Reibung

Beim geschwindigkeitsunabhängigen Reibungswiderstand

$$F_r = \mu F_N \quad (\mu = \text{Reibungskoeffizient})$$

kann die Reibung durch einen konstanten Term in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden:

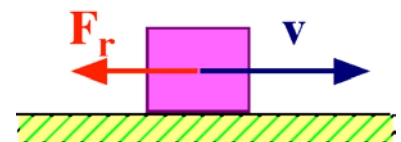
$$m \ddot{x} + c x \pm \mu F_N = 0$$

Die Reibungskraft ist immer der Geschwindigkeit entgegengerichtet. Deshalb hängt ihr Vorzeichen von der Bewegungsrichtung ab. Ist $v > 0$, so ist die Reibungskraft negativ.

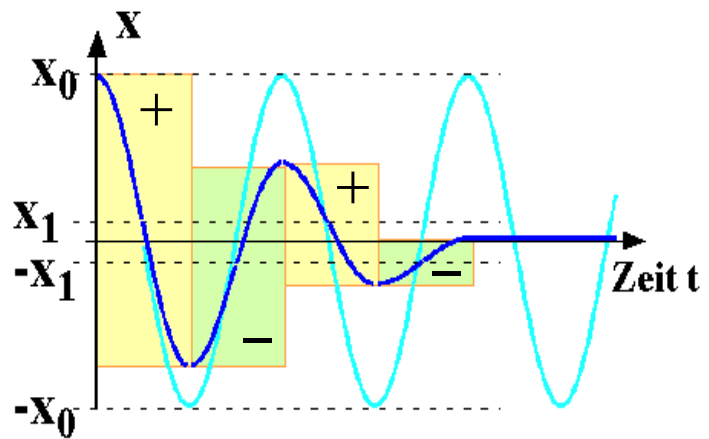
Mit $x_1 = \mu F_N / c$ wird $m \ddot{x} = -c (x \pm x_1)$

Die Reibungskraft ist hier so umgeschrieben, dass sie einer Verschiebung des Koordinatensystems entspricht.

Weil $\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(x \pm x_1)$ findet hier offenbar eine scheinbar normale, ungedämpfte Schwingung statt, wobei der Ursprung des Koordinatensystems um x_1 verschoben ist, **einmal nach oben (+ x_1)**, **einmal nach unten (- x_1)**. Die Oszillationsampli-



tude ist deshalb geringer als die Auslenkung, und sie ändert bei jeder Umkehr. Deshalb findet bei jeder Periode eine Verringerung der Oszillationsamplitude um $2 x_1$ statt: die Amplitude nimmt als arithmetische Reihe ab. Sobald die Trägheitskraft kleiner als die Reibungskraft wird bleibt das System irgendwo zwischen $+x_1$ und $-x_1$ hängen.



Der Fall $F_R \propto v^2$ wird hier nicht ausgeführt.

Geschwindigkeitsproportionale Reibung

Dieser wichtigste Fall entspricht der geschwindigkeitsproportionalen (viskosen) Reibung:

$$m \ddot{x} = -c x - b \dot{x} .$$

Die standardisierte Form dieser Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2 \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad \text{mit } \beta = \frac{b}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} .$$

Die Größe β wird als Abklingkoeffizient bezeichnet.

Eine solche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist immer lösbar mit dem Ansatz

$$x = A e^{\lambda t} . \quad \dot{x} = \lambda A e^{\lambda t} \quad \ddot{x} = \lambda^2 A e^{\lambda t} .$$

$$\text{Einsetzen ergibt } \lambda^2 + 2 \beta \lambda + \omega_0^2 = 0 . \quad \rightarrow \quad \lambda^2 + 2 \beta \lambda + \beta^2 = \beta^2 - \omega_0^2$$

Damit reduziert sich das Problem auf das Auffinden der Nullstellen dieser Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)} = -\beta \pm i \omega_s \quad \text{mit } \omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_s t} + A_2 e^{-i\omega_s t}) .$$

Physikalisch sinnvolle Lösungen müssen reell sein; dies ist offenbar dann der Fall, wenn die beiden Konstanten zueinander konjugiert komplex sind, $A_1 = A_2^*$.

In diesem Fall kann der Ausdruck in der Klammer auf die Form $A \cos(\omega_s t + \varphi)$ gebracht werden, sofern ω_s reell ist.

Die Art der Lösung wird durch ω_s bestimmt. Man kann drei Bereiche unterschei-

den, je nachdem ob der Wurzel Ausdruck reell, imaginär oder null ist.

$\omega_0 > \beta$, Schwingfall	$D < 1$
$\omega_0 < \beta$, Kriechfall	$D > 1$
$\omega_0 = \beta$, aperiodischer Grenzfall	$D = 1$

Wir behandeln die drei Fälle, die man auch anhand der Dämpfungsgrades $D = \beta / \omega_0$ klassifizieren kann, in dieser Reihenfolge.

4.4.2 Schwache Dämpfung (Schwingfall)

Im Bereich der schwachen Dämpfung kann der Dämpfungsgrad den Wertebereich von $0 < D < 1$ annehmen, der so genannte Gütefaktor $Q = 1/(2D) = \omega_0/(2\beta)$ ist dann > 0.5 .

In natürlichen Systemen kommen sehr unterschiedliche Werte vor. Beispielsweise können atomare Systeme eine extrem geringe Dämpfung aufweisen. Übergänge, die für Atomuhren benutzt werden, haben Gütefaktoren von mehr als 10^{10} .

Mit $\omega_0 > \beta$ ist die Eigenfrequenz größer als die Abklingkonstante. Das System verhält sich dann in erster Näherung wie ein ungedämpfter Oszillator mit abfallender Amplitude.

Die Lösung kann in diesem Bereich geschrieben werden als

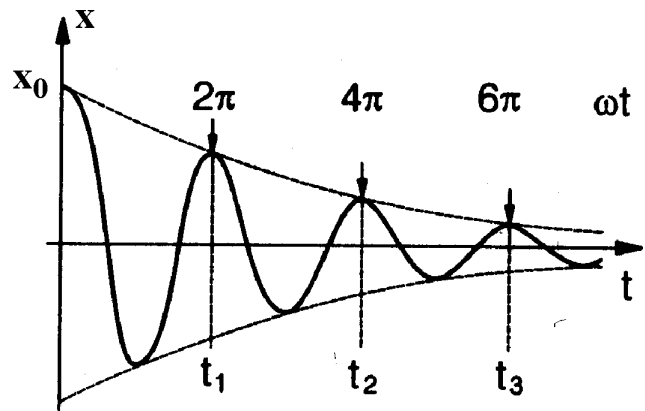
$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_s t + \varphi) ,$$

wobei die Amplitude x_0 und die Phase φ wiederum aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Die Amplitude fällt also exponentiell ab und die Schwingungsfrequenz ist niedriger

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0 .$$

Nebenbemerkung: Die Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude, sie fällt somit mit der doppelten Rate ab, $E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{tot}}(0) e^{-2\beta t}$.



Aus experimentellen Daten können die Parameter ω_s und β bestimmt werden. ω_s erhält man aus der Periodendauer T .

Der Abklingkoeffizient β kann durch Vergleich der Amplitude zu verschiedenen Zeiten ermittelt werden:

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = \frac{\cos[\omega(t+T)]e^{-\beta(t+T)}}{\cos(\omega t)e^{-\beta t}} = e^{-\beta T}$$

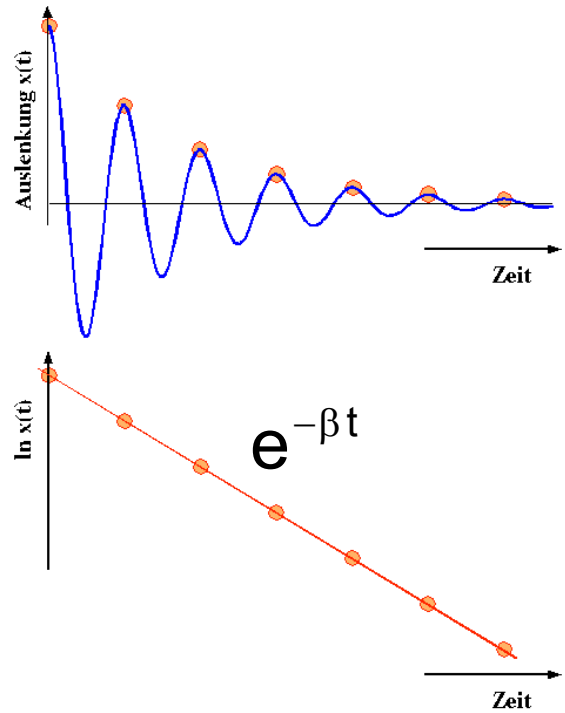
wegen der 2π Periodizität.

$$\rightarrow \beta = \frac{1}{T} \ln \left[\frac{x(t)}{x(t+T)} \right].$$

In der Praxis trägt man z.B. die Amplitude als Funktion der Zeit logarithmisch auf und bestimmt die Zerfallszeit aus einem linearen Fit.

Versuch I.63b: Federpendel mit Dämpfung

In diesem Beispiel kann eine Dämpfung eingestellt werden: die Pendelmasse besteht aus einem Kupferblech, welches sich zwischen zwei Elektromagneten bewegt. Wird ein Magnetfeld angelegt, so werden im Kupferblech Wirbelströme induziert, welche wie bei einer Wirbelstrombremse die Bewegung abbremsen. Die Auslenkung wird auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht, indem man das Licht misst, das am Kupferblech vorbei auf eine Fozozelle gelangt.



Mechanische Schwingung

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad \rightarrow \quad \omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Gedämpfte elektromagnetische Schwingungen

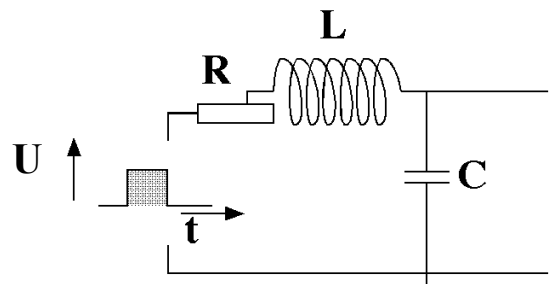
Als ein Beispiel für gedämpfte Schwingungen betrachten wir den RLC Schwingkreis. Er kann aus dem LC Kreis abgeleitet werden. Durch Zufügen eines Ohmschen Widerstandes (der in jedem Schwingkreis existiert) erhält man eine modifizierte Maschenregel:

$$U_L + U_R + U_C = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} + R I + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

$$2\beta = \frac{R}{L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$



$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} < \omega_0.$$

Versuch II.92a: gedämpfte RLC Schwingungen

Der RLC Schwingkreis verhält sich ähnlich wie der LC Schwingkreis, ist aber gedämpft.

4.4.3 Überkritische Dämpfung (Kriechfall)

Wir betrachten jetzt den Fall, dass die Dämpfung größer als die Resonanzfrequenz ist,

$\beta > \omega_0$, Dämpfungsgrad $D = \beta / \omega_0 > 1$, Gütefaktor $Q < 0.5$.

Damit wird der Radikand $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ und die Wurzel imaginär. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Bereich

$x(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}) \rightarrow \omega = (\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

wobei $c_{1,2}$ Integrationskonstanten darstellen, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Das System nähert sich zweifach exponentiell seinem Gleichgewicht. In diesem Fall tritt keine Schwingung mehr auf, sondern das System bewegt sich monoton in Richtung auf seinen Gleichgewichtswert (der nie ganz erreicht wird). Die Amplitude kann maximal einen Nulldurchgang aufweisen, wenn c_1 und c_2 ein unterschiedliches Vorzeichen besitzen.

Versuch I.69: Pohl'sches Rad

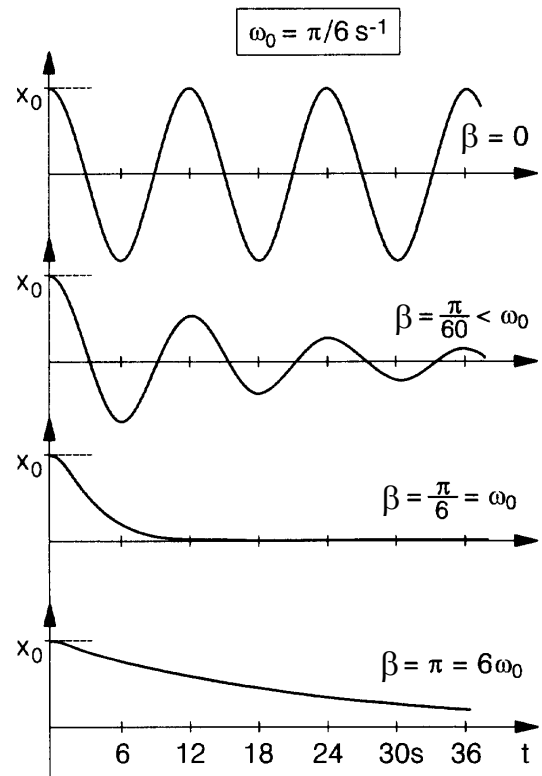
Mit einem ähnlichen Aufbau kann man auch den aperiodischen Grenzfall beobachten.

4.4.4 Der aperiodische Grenzfall

$\omega_0 = \beta$ d.h. $D = \beta / \omega_0 = 1$. Dies wird auch als der Fall der kritischen Dämpfung bezeichnet. In diesem Fall kann die Lösung der DGL als

$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t}$.

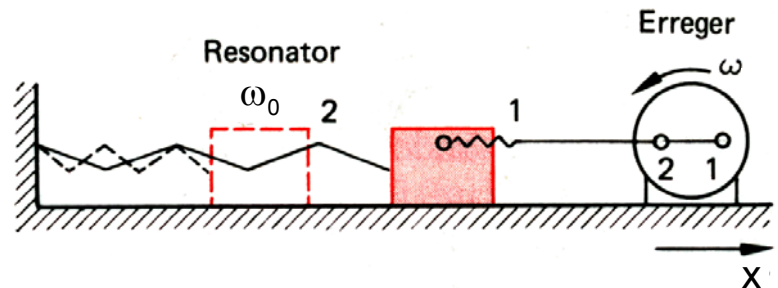
geschrieben werden. Diese Situation führt dazu, dass der Gleichgewichtswert am schnellsten (näherungsweise) erreicht wird. Man verwendet dies somit z.B. in Messgeräten, bei denen man den (Gleichgewichts-) Messwert möglichst rasch erreichen möchte.



4.5 Erzwungene Schwingungen

4.5.1 Bewegungsgleichung

In vielen Fällen schwingt ein System nicht frei, sondern man führt ihm von außen Energie zu, indem man eine periodische Kraft am schwingenden System angreifen lässt.



Versuch I.69: Pohl'sches Rad

In diesem Beispiel wird ein Drehpendel über einen Exzenter angeregt.

Ein getriebener Oszillator, bzw. eine erzwungene Schwingung wird durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$\ddot{x} + 2 \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = K(t)/m ,$$

wobei $K(t)$ die periodische, äußere Kraft beschreibt.

Die äußere Kraft leistet am System Arbeit, so dass die Energie des Systems zu-, aber auch abnehmen kann. Diese Änderung hängt davon ab, ob die Kraft in Richtung der Geschwindigkeit oder in der entgegengesetzten Richtung wirkt.

Wir berechnen die dem System zugeführte Leistung $P = F v$ durch Multiplikation der obigen Gleichung mit \dot{x} :

$$P = K(t) \dot{x} = m \ddot{x} \dot{x} + 2 \beta m \dot{x}^2 + \omega_0^2 m x \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c x^2 \right) + 2 \beta m \dot{x}^2 .$$

Die extern geleistete Arbeit fließt somit in die Änderung der mechanischen (kinetischen plus potentiellen) Energie und kompensiert die Reibungsverluste, die dem System Energie entziehen. Die zugeführte Leistung ist positiv wenn $K(t)$ und v das gleiche Vorzeichen haben, d.h. wenn Kraft und Geschwindigkeit in Phase sind. Ist die Kraft hingegen mit dem Ort in Phase, also gegenüber der Geschwindigkeit 90° außer Phase, so wird dem System über eine Schwingung gemittelt keine Energie zugeführt.

Hier liegt also eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung vor. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems wird durch zwei linear unabhängige Funktionen aufgespannt, welche zusammen zwei freie Parameter enthalten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Der einfachste Weg zur allgemeinen Lösung folgt dem Rezept:



allg. Lösung. der inhomogen DGL = allg. Lösung der homogenen DGL
+ beliebige Lösung der inhomogenen DGL

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung haben wir oben bestimmt:

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_s t} + A_2 e^{-i\omega_s t}) = e^{-\beta t} A \cos(\omega_s t + \varphi) \quad \text{mit} \quad \omega_s = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$$

Jetzt benötigen wir zusätzlich eine (beliebige) Lösung der inhomogenen Gleichung.

4.5.2 Stationäre Lösung

Eine relativ einfache Lösung, die auch häufig benötigt wird, ist die stationäre Lösung, d.h. der Zustand, der sich einstellt wenn die Anfangsbedingungen nicht mehr relevant sind. Wir betrachten dafür nur eine spezielle Form der äußeren Kraft, nämlich eine harmonische Anregung. Wir verwenden hier die komplexe Schreibweise

$$K(t) = K_0 e^{i\omega t},$$

wobei die physikalische Kraft dem Realteil entspricht,

$$K_p(t) = K_0 \cos(\omega t).$$

Für die Lösung machen wir den Ansatz, dass das System der äußeren Kraft mit dessen Frequenz folgt, d.h. wir setzen

$$x(t) = a(\omega) e^{i\omega t} = A(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)}$$

mit $a(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi}$ als Amplitude in komplexer Schreibweise, und $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ reelle Amplitude und Phase. Offenbar sind

$$\dot{x}(t) = i \omega a(\omega) e^{i\omega t} = i \omega x(t), \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt $(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2) a(\omega) = K_0/m$.

$$\text{Auflösen nach } a \text{ ergibt } a(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi} = \frac{K_0}{m} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega\beta + \omega_0^2}.$$

Dies ist bereits die Lösung in komplexer Schreibweise. Offenbar ist die Antwort des Systems proportional zur äußeren Anregung. Diese Proportionalität kann als

$$a(\omega) = \frac{K_0}{m} Y(i\omega) \text{ geschrieben werden, wobei } Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\beta s + \omega_0^2}$$

die komplexe Transferfunktion des Systems darstellt. Sie stellt das Verhältnis zwischen einer harmonischen äußeren Kraft und der Antwort des Systems dar. Diese einfache Beziehung gilt natürlich nur weil das System linear ist.

4.5.3 In- und Außer-Phase-Anteil

Die physikalische Auslenkung entspricht dem Realteil der komplexen Funktion

$$x_p(t) = \operatorname{Re}\{a(\omega) e^{i\varphi t}\} = \operatorname{Re}\{a(\omega)\} \cos(\omega t) - \operatorname{Im}\{a(\omega)\} \sin(\omega t) .$$

Somit beschreibt der Realteil von $a(\omega)$ die In-Phase Komponente der Auslenkung, der Imaginärteil den Außer-Phase Teil.

Wir können Real- und Imaginärteil erhalten, indem wir mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitern:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{K_0}{m} (-\omega^2 - 2i\beta\omega + \omega_0^2) / [(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)(-\omega^2 - 2i\beta\omega + \omega_0^2)] \\ &= \frac{K_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] . \end{aligned}$$

$$\text{Somit sind } \operatorname{Re}[a(\omega)] = \frac{K_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] .$$

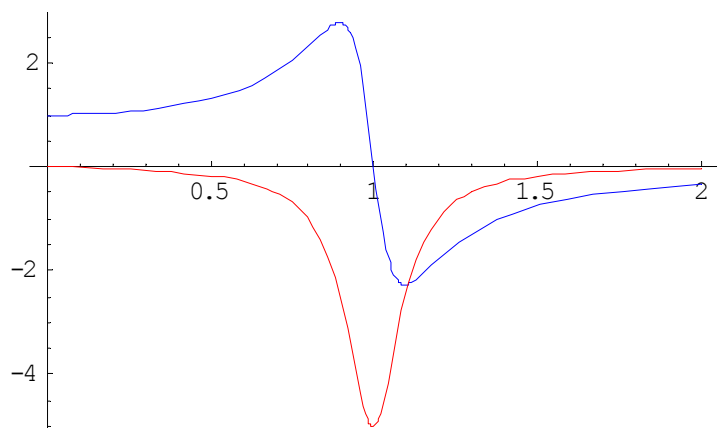
$$\text{und } \operatorname{Im}[a(\omega)] = -\frac{K_0}{m} 2\beta\omega / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] .$$

Offenbar ist dies im Wesentlichen eine Funktion der Frequenz ω , d.h. der Frequenz der äußeren Kraft.

Mit $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)$ findet man zwei Maxima bei $\omega = \pm \omega_0$. Sofern die Dämpfung nicht zu groß ist, kann der Nenner vereinfacht werden zu

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 + \omega)^2 (\omega_0 - \omega)^2 \sim 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 .$$

In der Figur sind Realteil und Imaginärteil der komplexen Amplitude als Funktion der Frequenz ω dargestellt für $K_0/m = 1$, $\omega_0 = 1$, $\beta = 0.1$. Wesentlich ist, dass es sich um ein resonantes Verhalten handelt: Der **Realteil**, also der in-Phase Anteil wächst zunächst mit zunehmender Frequenz, bis er bei $\omega_0 - \beta$ ein Maximum erreicht. Mit weiter zunehmender Frequenz nimmt er wieder ab und geht auf der Resonanzfrequenz ω_0 durch 0. Hier erreicht der **Imaginärteil** sein Maximum. Die Breite der Resonanzlinie ist gegeben durch die Dämpfungskonstante β .



Ein interessanter Grenzfall ist derjenige für kleine Frequenzen: Wenn die Frequenz der äußeren Anregung gegen Null geht, $\omega \rightarrow 0$, verschwindet offenbar der Imaginärteil, während

$$\operatorname{Re}[a(0)] = \frac{K_0}{m} \omega_0^2 / (\omega_0^2)^2 = K_0 / (m \omega_0^2) = K_0 / c .$$

Die Auslenkung ist somit gerade durch die Federkonstante c gegeben, wie wir es bei einer zeitunabhängigen äußeren Kraft erwarten.

4.5.4 Resonante Anregung

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist derjenige für $\omega = \omega_0$:

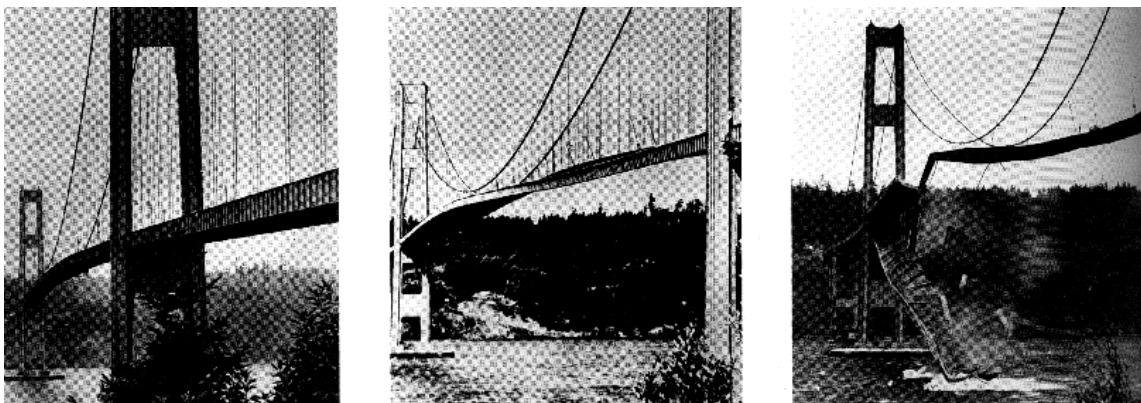
$$\operatorname{Re}[a(\omega_0)] = 0 .$$

$$\operatorname{Im}[a(\omega_0)] = - \frac{K_0}{m} \frac{2 \omega_0 \beta}{(4 \omega_0^2 \beta^2)} = - \frac{K_0}{m} / (2 \omega_0 \beta) = - \frac{K_0}{c} \frac{\omega_0}{2\beta} = - \frac{K_0}{c} Q .$$

Der Realteil verschwindet also bei der Resonanzfrequenz, während der Betrag des Imaginärteils sein Maximum erreicht. Das Maximum ist proportional zum Verhältnis der äußeren Kraft zur Kraftkonstante des Systems und zum Verhältnis der Resonanzfrequenz zur Dämpfung. Dieses Verhältnis wird auch als Gütefaktor Q des Systems bezeichnet. Bei mechanischen Systemen ist es typischerweise in der Größenordnung von einigen 10 bis einigen 100. In atomaren Systemen kann diese Kreisgüte jedoch bis auf mehr als 10^{15} anwachsen. Entsprechend ist die Resonanzüberhöhung dort extrem groß.

Das Verhalten wurde bereits anhand des Pohl'schen Rades gezeigt: Das Pendel wird durch einem Motor mit variabler Frequenz angetrieben. Bei kleinen Geschwindigkeiten schwingt das Pendel in Phase mit der äußeren Kraft; die Amplitude bleibt klein. Wenn wir die Geschwindigkeit des Motors, d.h. die Drehzahl, bzw. Frequenz, erhöhen, gelangen wir in die Nähe der Resonanzfrequenz. Dort wird die Auslenkung des Pendels sehr groß.

Versuch I.67a: erzwungene Schwingung und Resonanz, Fadenpendelreihe



Clip: Tacoma Narrows Bridge Collapse

Die Amplitude einer Schwingung kann sehr groß werden und zur Zerstörung des Objektes führen.

4.5.5 Absolutbetrag und Phase

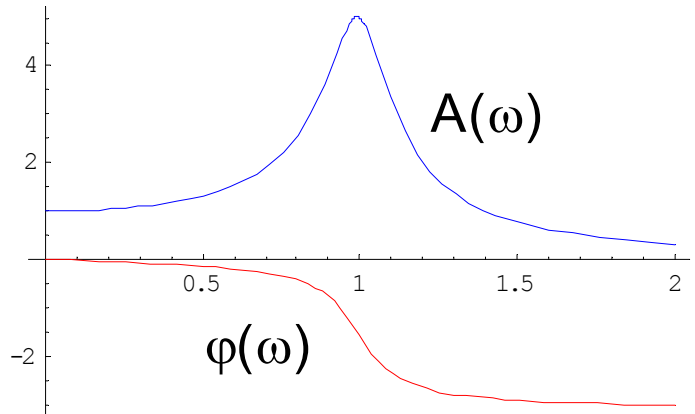
Wir können daraus auch Absolutbetrag der Amplitude

$$A(\omega) = \{\text{Re}[a(\omega)]^2 + \text{Im}[a(\omega)]^2\}^{1/2} = \frac{K_0}{m} 1/[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \omega^2 \beta^2]^{1/2} \text{ erhalten}$$

sowie die Phasenverschiebung φ zwischen erregender Kraft und Auslenkung des Systems als $\tan \varphi = \text{Im}[a(\omega)] / \text{Re}[a(\omega)] = 2 \beta \omega / (\omega^2 - \omega_0^2)$.

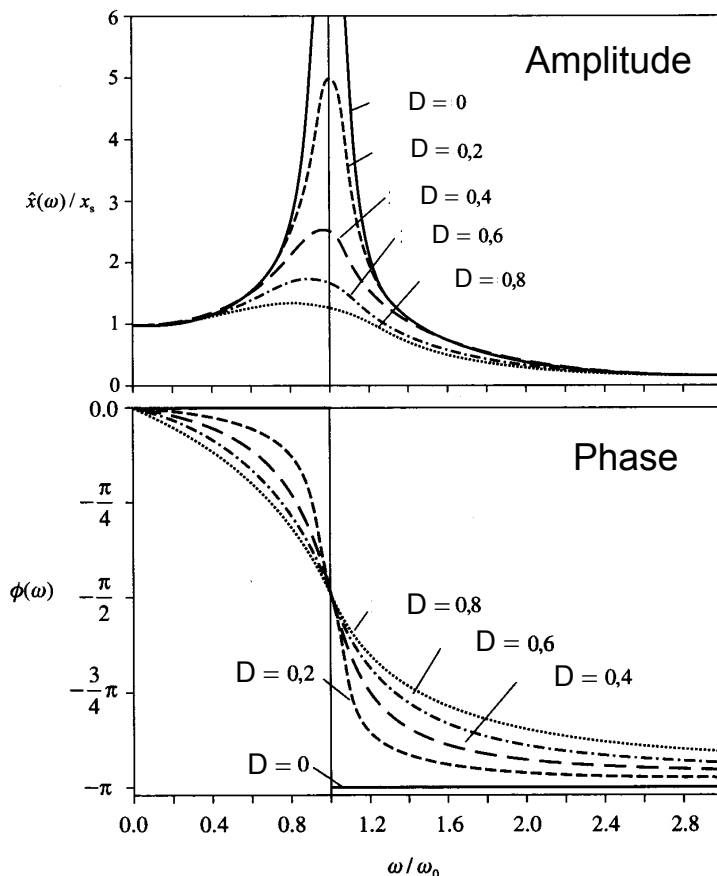
Offenbar erreicht der Absolutbetrag sein Maximum für $\omega = (\omega_0^2 - 2 \beta^2)^{1/2}$.

Die Figur zeigt **Amplitude** und **Phase** für die gleichen Parameter wie oben. Die Amplitude erhält offenbar eine starke Überhöhung in der Nähe der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$. Für kleinere Frequenzen ist die Phase 0, d.h. das System schwingt in Phase mit der äußeren Anregung. Auf der Resonanz beträgt die Phase $-\pi/2$, und für größere Frequenzen hinkt das System um $180^\circ (= -\pi)$ hinter der Anregung her.



Die Phasenverschiebung von 90° wird auch klar, wenn wir uns daran erinnern, wie wir eine Schaukel anstoßen. Wenn sich die Schaukel im Umkehrpunkt befindet (also Geschwindigkeit $v = 0$), sollte sie mit maximaler Geschwindigkeit (und natürlich auch im richtigen Takt) angestoßen werden, um eine große Auslenkung zu erreichen.

Wir können dieses Verhalten im Experiment anhand eines gedämpften elektrischen Schwingkreises beobachten.



Wir können dieses Verhalten im Experiment anhand eines gedämpften elektrischen Schwingkreises beobachten.

Versuch II.95: RLC Kreis stationär

Bei geringer Dämpfung ist die Resonanzlinie sehr schmal. Die Amplitude ist hoch, die Phase wechselt rasch. Mit zunehmender Dämpfung wird das Maximum niedriger und breiter, ebenso der Phasenwechsel. Die Resonanzfrequenz, also die Frequenz bei der die Amplitude maximal wird, sinkt mit zunehmender Dämpfung.

Bei geringer Dämpfung fällt das Maximum der Amplitude mit der Phasenverschiebung um $\pi/2$ zusammen. Dies ist leicht einsichtig wenn wir die am System geleistete Arbeit betrachten: Diese ist allgemein gegeben als $K(t) \dot{x}(t)$. Wenn die Phase bei $\pi/2$ liegt, so ist die Auslenkung

$$x(t) = A(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)} = -A(\omega) i e^{i\omega t} \text{ gegenüber der Kraft } K(t) = K_0 e^{i\omega t}$$

um -90° außer Phase. Die Geschwindigkeit $\dot{x}(t) = -i A(\omega) \omega e^{i\omega t} = A(\omega) \omega e^{i\omega t}$

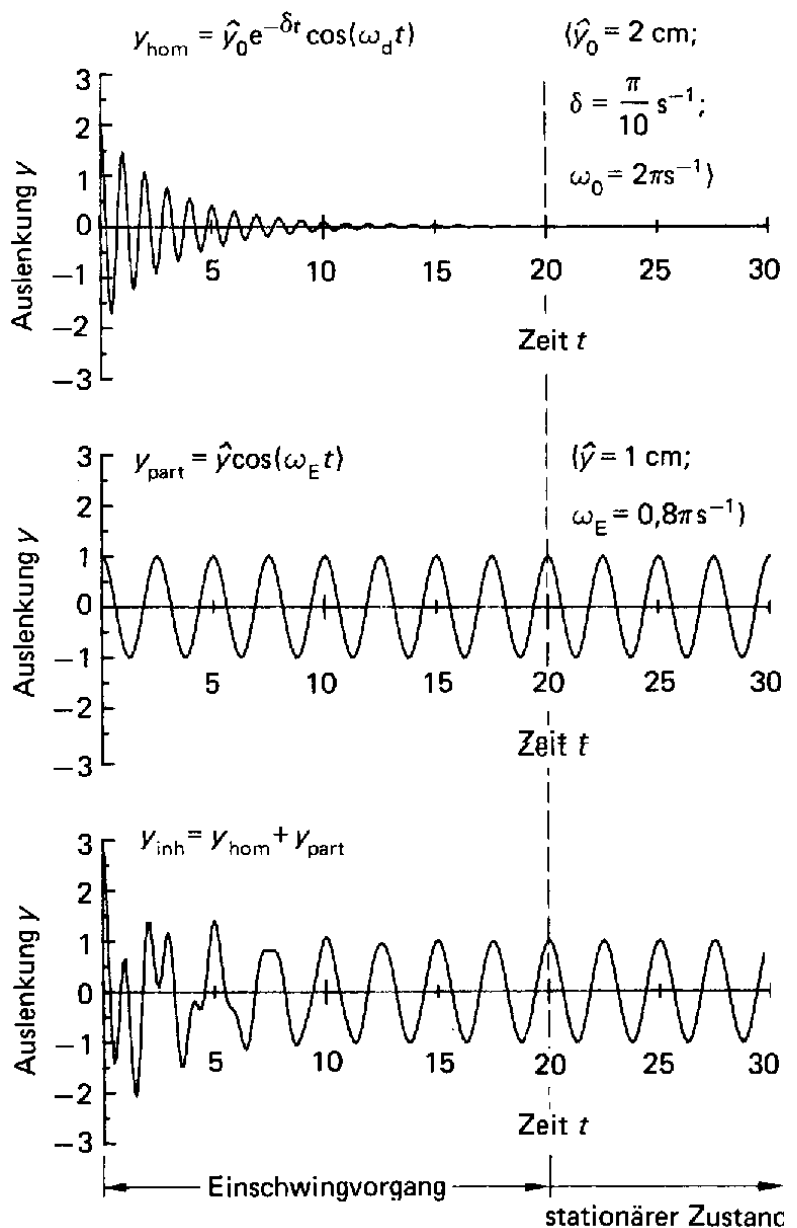
ist in Phase mit der äußeren Kraft, so dass die am System geleistete Arbeit maximal wird. Das System erreicht dann einen stationären Zustand, wenn die hineinfließende Arbeit gerade gleich der herausfließenden ist. Diese ist durch die Dämpfung gegeben, so dass die Amplitude bei der Resonanzfrequenz

$$A(\omega_0) = \frac{K_0}{m} \frac{1}{2 \omega_0 \beta}$$

indirekt proportional zur Dämpfungskonstante β wird.

4.5.6 Einschwingvorgang

Nachdem wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (der freie gedämpfte harmonische Oszillator) und eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (die stationäre Lösung) diskutiert haben, können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als Summe der beiden diskutieren. Der freie gedämpfte Oszillator führt eine Schwingung mit der Resonanzfrequenz durch, welche exponentiell gedämpft ist. Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist die stationäre Lösung, d.h. eine Schwingung mit konstanter Amplitude und der Frequenz der äußeren Störung.



Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung entspricht somit einer Superposition dieser beiden Lösungen. Für lange Zeiten sollte das System sich

dem stationären Zustand nähern. Für kurze Zeiten wird sich das System ähnlich wie der freie Oszillator bewegen. In diesem Bereich erwartet man eine Überlagerung der freien Schwingung mit der getriebenen, und damit eine Schwebung.

Dieses Verhalten kann beobachtet werden, wenn man bei der getriebenen Schwingung die Dämpfung gering hält. Der Einschwingvorgang, der bei der Frequenz des freien Oszillators liegt, überlagert sich der Schwingung, mit der das System der externen Anregung folgt.

4.5.7 Zusammenfassung

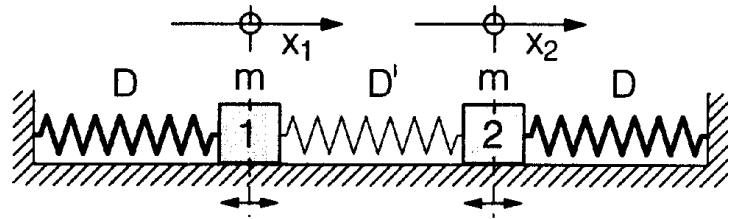
Wir fassen hier nochmals des Verhalten von freien und erzwungenen Schwingungen in gedämpften und ungedämpften Systemen zusammen.

	freie Schwingung	erzwungene Schwingung
	<p>Modell</p> <p>einmalige Auslenkung</p>	<p>Modell</p> <p>periodische Erregung von außen</p>
ungedämpft	<p>zeitlich konstante Amplitude: $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}_3 = \hat{y}_4$</p>	
gedämpft	<p>zeitlich abnehmende Amplitude: $\hat{y}_1 > \hat{y}_2 > \hat{y}_3 > \hat{y}_4$</p>	

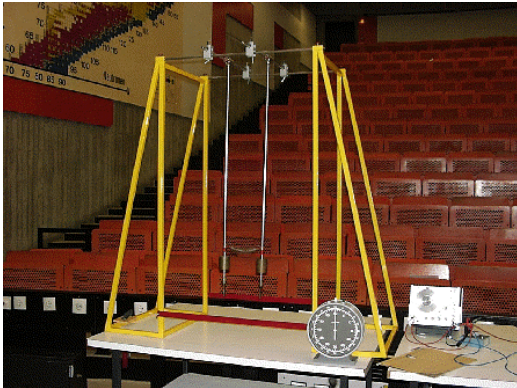
4.6 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

4.6.1 Das Doppelpendel

Wir betrachten nun nicht mehr einzelne, unabhängige harmonische Oszillatoren, sondern mehrere, die aneinander gekoppelt sind.



Wir können zwei Federpendel oder auch zwei Federpendel über eine Koppelfeder verbinden.



Versuch III.6: Doppelpendel

Wenn wir eines der gekoppelten Pendel anstoßen, so wird seine Energie auf das andere übertragen. Die Schwingung des ersten Pendels wird dabei gedämpft bis es ganz still steht, diejenige des zweiten Pendels baut sich auf, bis der Vorgang sich umkehrt. Offenbar wird hier Energie von einem Pendel auf das andere übertragen.

Wir können die Bewegungsgleichung des Doppelpendels schreiben als

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega_0^2 \varphi_1 + \kappa (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega_0^2 \varphi_2 + \kappa (\varphi_1 - \varphi_2),$$

d.h. wir haben jetzt ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen.

Im Allgemeinen kann man Systeme von gekoppelten linearen Differentialgleichungen lösen indem man die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt. In diesem Fall handelt es sich um ein speziell einfaches System, bei dem dies nicht notwendig ist. Wir können die Lösung finden indem wir Summe und Differenz dieser beiden Gleichungen bilden:

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\xi}_1 = -\omega_0^2 (\varphi_1 + \varphi_2) = -\omega_0 \xi_1.$$

$$\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\xi}_2 = -\omega_0^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + 2\kappa (\varphi_2 - \varphi_1) = -(\omega_0^2 + 2\kappa) \xi_2.$$

Somit haben wir zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen für die Variablen $(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $(\varphi_1 - \varphi_2)$ gefunden, welche jeweils einem harmonischen Oszillator entsprechen. Somit sind die Lösungen für diese beiden Variablen

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \xi_1 = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)},$$

wobei Amplitude A und Phase φ durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Entsprechend findet man für

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \xi_2 = B e^{i(\omega_2 t + \varphi)} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa}$$

Die zweite Frequenz liegt somit immer höher als die Frequenz für die symmetrische Mode. Die Erhöhung wird durch das Verhältnis aus Kopplungsstärke und Modenfrequenz bestimmt. Ist $\kappa \ll \omega_0^2$ (kleine Kopplung) dann kann wird

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2\kappa}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\kappa}{\omega_0^2}\right).$$

Die beiden Schwingungen, bei denen keine Energieübertragung zwischen den Pendeln stattfindet, werden Fundamentalschwingungen (oder Eigenschwingungen oder Normalmoden) genannt. Die symmetrische (Gleichtakt-) Mode besitzt dabei die Frequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ eines Einzelpendels, da die Pendellänge durch die Kopplung nicht geändert wurde. Bei der antisymmetrischen (Gegentakt-) Mode bewirkt die Kopplung eine Erhöhung der Rückstellkraft, und damit der Frequenz, d.h. $\omega_2 > \omega_0$. Im Falle schwacher Kopplung sind die beiden Frequenzen ähnlich und wir können eine Schwebung erwarten, wenn wir beim Doppelpendel eine beliebige Schwingung anregen, d.h. nicht gerade eine symmetrische oder eine antisymmetrische Mode.

4.6.2 Eigenschwingungen

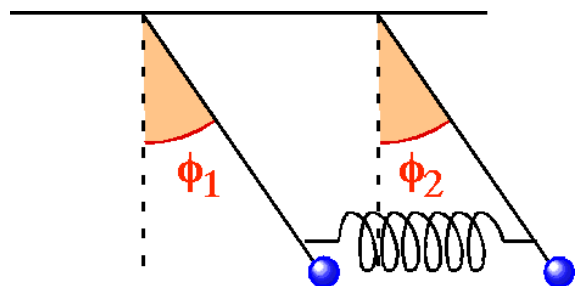
Wir betrachten zunächst einige spezielle Situationen. Zunächst betrachten wir den Fall dass

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0 ; \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 ,$$

d.h. den Fall dass beide Pendel zur gleichen Seite ausgelenkt werden und aus der Ruhe losgelassen werden. Eingesetzt in die obigen Lösungen für ξ_1 und ξ_2 finden wir

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \xi_1 = 2 \varphi_0 e^{i\omega_0 t} , \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \xi_2 = 0 , \quad \text{oder } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 e^{i\omega_0 t} ,$$

d.h. beide Pendel schwingen mit der gleichen Frequenz ω_0 , gleicher Amplitude und gleicher Phase. Die Kopplungsfeder ist in diesem Fall entspannt und hat deshalb keinen Einfluss auf das System. Man bezeichnet diesen Schwingungszustand als die erste Normalmode des Systems. Diese gleichphasige Schwingung stellt ein symmetrische Mode dar.



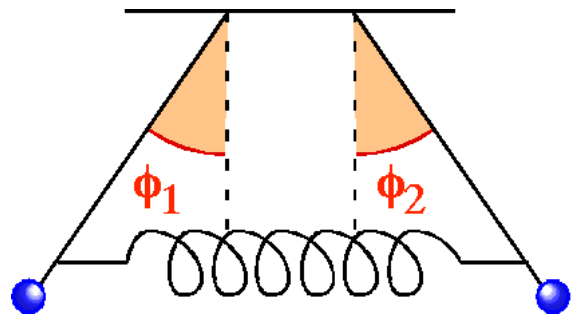
Als nächstes betrachten wir die gegenphasige Schwingung, die auch als antisymmetrische Mode bezeichnet wird. Diesen erhalten wir, wenn die beiden Pendel in entgegengesetzte Richtung ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen werden,

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0 ; \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 .$$

Aus dieser Anfangsbedingung erhalten wir

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \xi_2 = 2 \varphi_0 e^{i\omega_2 t}, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_0 e^{i\omega_2 t} .$$

Somit bewegen sich in diesem Fall beide Pendel mit gleicher Frequenz und Amplitude, diesmal aber in Gegenphase. Dadurch ist die Feder in diesem Fall immer maximal gespannt, so dass die rücktreibende Kraft auf beide Pendel um den entsprechenden Wert größer wird. Die Resonanzfrequenz ω_2 für diese zweite Normalmode ist deshalb größer als die Grundfrequenz.



4.6.3 Schwebung

Als dritten Fall betrachten wir die Situation, dass einer der beiden Pendel ausgelenkt wird, während der andere in Ruhelage ist, und beide zunächst in Ruhe, d.h.

$$\varphi_1(0) = \varphi_0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 .$$

In den Variablen ξ_1 und ξ_2 muss die zeitliche Entwicklung somit

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \xi_1 = \varphi_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \xi_2 = \varphi_0 e^{i\omega_2 t}$$

sein. Die Auslenkung der beiden Pendel wird damit

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2) = \frac{1}{2} \varphi_0 (e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_2 t}) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi_2) = \frac{1}{2} \varphi_0 (e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_2 t}) .$$

In reeller Schreibweise entspricht dies für $\varphi_1 = \frac{1}{2} \varphi_0 [\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_2 t)]$

Das Additionstheorem $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ liefert

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_0}{2} t\right) = \varphi_0 \cos[(\omega_0 + \kappa)t] \cos(\kappa t) .$$

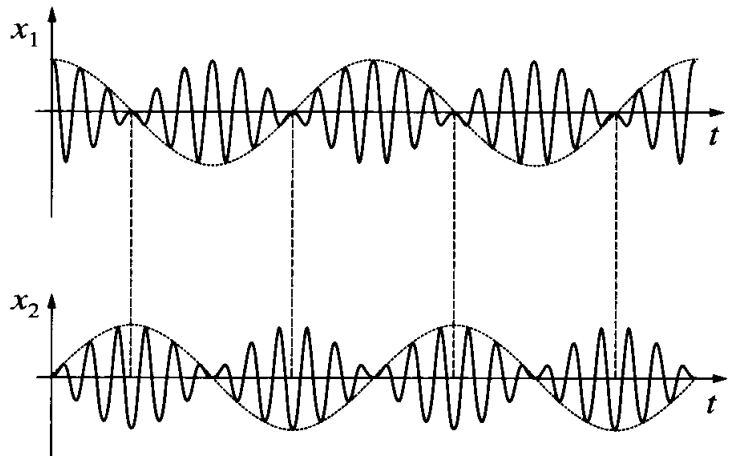
Für das zweite Pendel erhalten wir $\varphi_2 = \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi_2) = \frac{1}{2} \varphi_0 (e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_2 t}) .$

In reeller Schreibweise entspricht dies

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \varphi_0 [\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_2 t)] = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_0}{2} t\right)$$

wobei wir das Additionstheorem $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ benutzt haben.

Offenbar schwingen beide Pendel jetzt mit der mittleren Frequenz, wobei die Amplitude noch mit der halben Differenzfrequenz κ moduliert ist. Die Kopplung tritt hier also als Schwebung in Erscheinung.



Schwebungen treten allgemein immer dann auf, wenn man die Amplituden von zwei Schwingungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ mit unterschiedlichen Frequenzen ω_1 und ω_2 überlagert, z.B. von zwei leicht gegeneinander verstimmt Stimmgabeln. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass beide Schwingungen die gleiche Amplitude besitzen:

$$x_1(t) = x_0 \cos(\omega_1 t) \quad x_2(t) = x_0 \cos(\omega_2 t)$$

$$\text{Superposition } x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= 2 x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

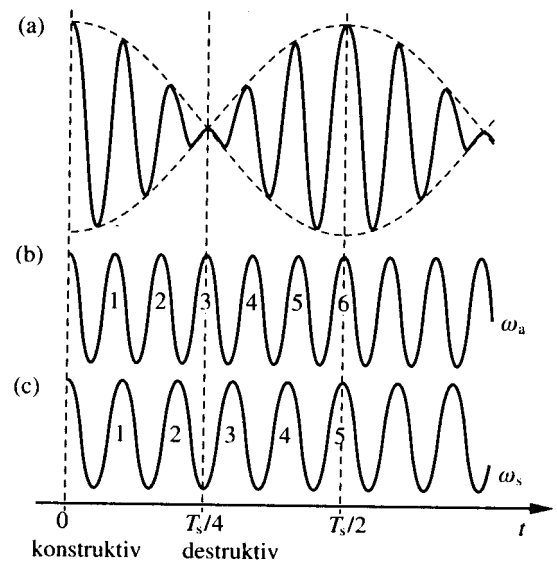
Dabei benutzen wird das Additionstheorem

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\text{Mittenfrequenz } \omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\text{Differenzfrequenz } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

Die Amplitude der Gesamtschwingung (mit ω_m) wird langsam (mit $\Delta\omega$) moduliert. Die gestrichelten Kurven nennt man Einhüllende. An der Nullstelle der Einhüllenden tritt ein Phasensprung auf. Ist $\Delta\omega \ll \omega_m$, dann kann man diese Einhüllende durch die damit an- und abschwellige Lautstärke gut hörbar machen.

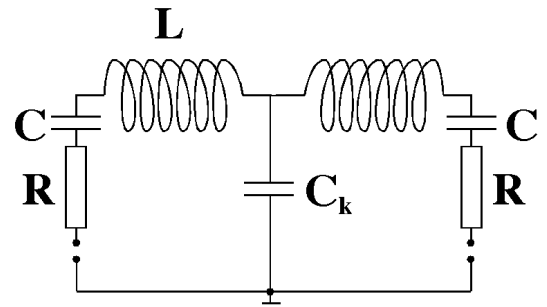


Versuch III.14: Stimmgabeln

4.6.4 Ergänzung: Gekoppelte elektrische Schwingkreise

Analog zu mechanischen Schwingkreisen können auch elektrische Schwingkreise gekoppelt werden. Wir betrachten hier als Beispiel ein System von zwei kapazitiv (d.h. über einen Kondensator C_k) gekoppelten Schwingkreisen.

Die beiden Schwingkreise sind unabhängig voneinander, sofern der Koppelkondensator C_k sehr groß wird: in diesem Fall wirkt er als Kurzschluss und der Punkt zwischen den beiden Spulen ist auf dem Potential der Masse. Jeder der beiden Schwingkreise entspricht dann einem unabhängigen harmonischen Oszillator. Ist der ohmsche Widerstand R klein, so beträgt die



Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Unter Berücksichtigung des Koppelkondensators können wir eine Eigenmode des Systems finden, wenn wir den Fall betrachten, bei dem das System symmetrisch schwingt. D.h. über den entsprechenden Komponenten auf beiden Seiten liegt jeweils die gleiche Spannung an. Aus Symmetriegründen hat der Koppelkondensator dann keine Wirkung. Das gesamte System besitzt dann die Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}L 2C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Sind die beiden Kreise im Gegentakt, fließt der Strom also durch den Kondensator C_k , so wird die gesamte Kapazität des Schwingkreises

$$C_{\text{tot}} = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_k}} = \frac{2CC_k}{2C + C_k} = \frac{2C}{2C/C_k + 1}.$$

Damit wird die Resonanzfrequenz $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}LC_{\text{tot}}}} = \frac{1}{\sqrt{L \frac{CC_k}{2C + C_k}}}$.

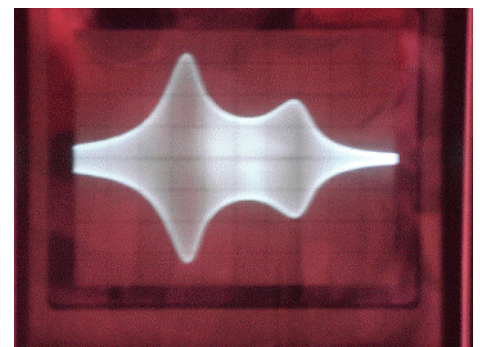
Wird der Koppelkondensator sehr groß, dann erhalten wir daraus wieder die Frequenz ω_0 . Für sehr kleine Koppelkondensatoren dominiert er und die zweite Resonanzfrequenz wächst auf

$$\omega_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC_k/2}}.$$

Versuch II.97: gekoppelte LC Kreise; Schwebung

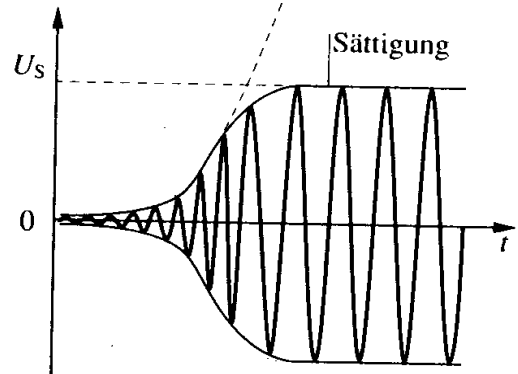
Offenbar kann diese Frequenz für kleine C_k sehr hoch werden.

Man kann die beiden Resonanzfrequenzen im Experiment beobachten, indem man eine variable Wechselspannung anlegt und die Spannung über einer der beiden Spulen abgreift. Für große Werte des Kop-



pelkondensators werden die beiden Resonanzfrequenzen praktisch identisch. Für kleine Werte nimmt die zweite Resonanzfrequenz stark zu.

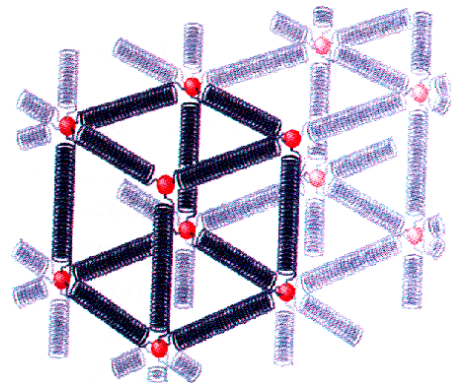
Man kann am gleichen System auch das freie Schwingungsverhalten beobachten indem man als äußere Spannung eine Stufenfunktion anlegt. Man beobachtet wie beim einzelnen RLC Kreis eine gedämpfte Schwingung, wobei in diesem Fall auch eine Schwebung sichtbar ist. Mit zunehmender Kopplungsstärke (kleinerem Kondensator) nimmt die Periode der Schwebung ab, d.h. die Schwebungsfrequenz zu.



Eine andere Art von Kopplung kann auftreten, wenn man mit einem Mikrofon, das an einen Verstärker mit Lautsprecher angeschlossen ist, zu nahe an den Lautsprecher kommt: Dann schaukelt sich ein Rückkopplungspfeifen hoch. Die hier wirksame Verstärkung kann man als "negative" Reibung auffassen, d. h. man kann wie in Kapitel 4.4 ansetzen, allerdings mit $\beta < 0$. Dadurch wird der Dämpfungsterm $e^{-|\beta|t}$ ersetzt durch $e^{+|\beta|t}$. Dieses exponentielle Anwachsen der Amplitude wird natürlich durch die Maximallautstärke der Anlage begrenzt. Zur Anfängerung der Schwingung ist hier keine periodische Anregung erforderlich, eine kleine (zufällige) äußere Störung reicht aus (Selbsterregung).

4.6.5 Ergänzung: Die lineare Kette

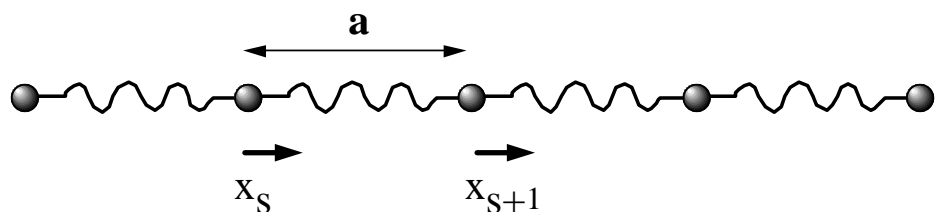
Von der Diskussion von zwei gekoppelten Massen gehen wir über zu einer Kette von Massen, welche über Federn aneinander gekoppelt sind.



Die ist ein wichtiges Modell für die Diskussion von Schwingungen in kristallinen Festkörpern. Das Gitter eines Festkörpers ist dadurch definiert, dass die Atome sich an der Stelle befinden, welche die Gesamtenergie der Anordnung minimiert. Dies ist deshalb die Position, die sie - abgesehen von der Nullpunktsbewegung - am absoluten Nullpunkt einnehmen. Bei endlichen Temperaturen hingegen können sie aus dieser Position ausgelenkt sein und damit eine höhere Energie besitzen. Die rücktreibende Kraft des Potentials führt dann zu einer Oszillationsbewegung.

Longitudinalschwingungen

Als einfachstes Modell für die Bewegung von Atomen in einem Festkörper betrachten wir



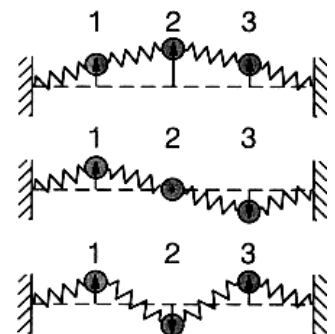
zunächst die eindimensionale Kette. Die darin enthaltenen Atome seien über Federn aneinander gekoppelt. Wichtig ist nun aber, dass in der Kette die Kraft, die auf ein Atom wirkt, nicht nur von seiner eigenen Position, sondern auch von der seiner Nachbaratome abhängt. Für eine einatomige Basis gilt

$$m \ddot{x}_s = D(x_{s+1} - x_s) + D(x_{s-1} - x_s) = D(x_{s+1} + x_{s-1} - 2x_s),$$

wobei D die Kraftkonstante und m die atomare Masse beschreibt. Jedes Atom ist in diesem Modell an seine Nachbaratome gekoppelt. Dies führt dazu, dass die Auslenkung nicht auf einem Atom lokalisiert bleiben kann.

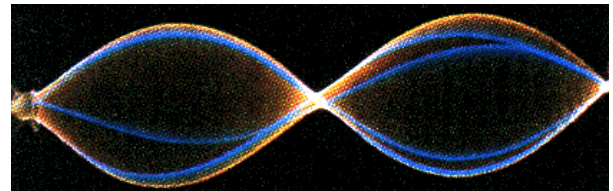
Transversalschwingungen

Die Atome können nicht nur in Richtung der Achse ausgelenkt werden, sondern auch senkrecht dazu. Man spricht im bisher diskutierten Fall von Longitudinalschwingungen, im andern Fall von Transversalschwingungen. Wir werden solche Schwingungen im Kapitel 5 (Wellen) genauer diskutieren. In den meisten Fällen existieren zwei voneinander unabhängige transversale Schwingungsmoden.



Im Beispiel sind $n = 3$ Schwinger gezeigt. Wenn man zum kontinuierlichen Grenzfall übergeht, d.h. $n \rightarrow \infty$, erhält man die Schwingungen einer Saite. Diese werden im Kapitel "Wellen" genauer diskutiert. Qualitativ kann das Ergebnis hier jedoch vorweggenommen werden:

Es gibt unendliche viele Eigenschwingungen, welche die Form $y_n = \sin(n \times \pi/L) \cos(\omega_n t)$ besitzen. Hier stellt n eine laufende Zahl dar, welche die Eigenschwingungen ordnet, x die Koordinate entlang der Saite, L ihre Länge, und ω_n die Eigenfrequenz der Schwingung. Jede Eigenmode entspricht einer harmonischen Auslenkung der Saite, und die Auslenkung zeigt eine harmonische Zeitabhängigkeit. Da die Saite am Rand eingespannt ist verschwindet dort die Auslenkung immer, ebenso an den dazwischen liegenden Knoten, also den Nulldurchgängen der Auslenkung. Die n -te Eigenmode besitzt $n - 1$ Knoten.



Die Frequenzen sind Vielfache der Grundfrequenz, d.h. $\omega_n = n \omega_1$, und die Grundfrequenz ist indirekt proportional zur Länge der Saite. Je länger eine Saite desto niedriger somit die Frequenz. Dies ist ein Grund dafür, dass tiefe Töne von großen Musikinstrumenten erzeugt werden.

4.6.6 Schwingungen mehrdimensionaler Systeme

Ähnliche Schwingungen treten auch in mehrdimensionalen Systemen auf. Ein klassisches Beispiel sind die Schwingungen einer Membran. Unter einer Memb-

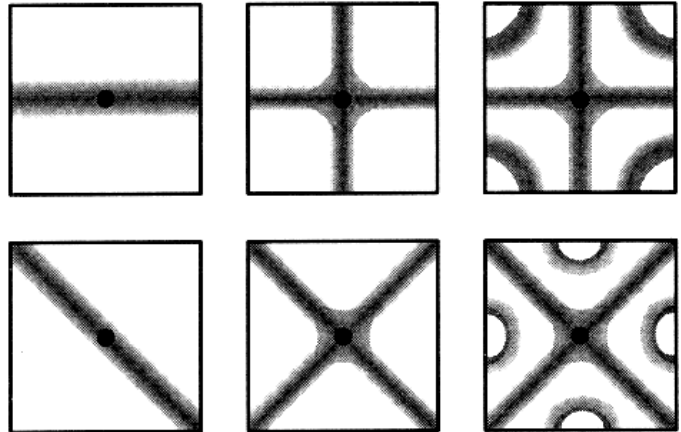
ran versteht man ein zweidimensionales schwingungsfähiges System. Dazu gehören z.B. Trommeln, wo eine elastische Membran am Rand eingespannt ist.

Versuche III.29a: Chladni'sche Klangfiguren, Membranschwingungen

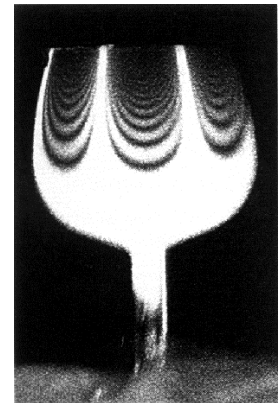
In diesem Experiment ist die "Membran" eine Platte aus Metall oder Glas, welche im Zentrum eingespannt ist. Mit Hilfe eines Bogens werden Schwingungen angeregt.

Diese können sichtbar gemacht werden indem Sand auf die Oberfläche gestreut wird.

Die Schwingung entspricht einer periodischen Auslenkung, bei der Teile der Membran sich nach oben verbiegen, andere nach unten. Nach einer halben Periode ist die Auslenkung umgekehrt. Es existieren jedoch Linien auf der Membran, welche nie ausgelenkt werden. Diese werden als Knotenlinien bezeichnet. Entlang der Knotenlinien sammelt sich der Sand und macht diese so sichtbar. Je größer die Anzahl der Knotenlinien, desto höher die Frequenz der entsprechenden Moden.



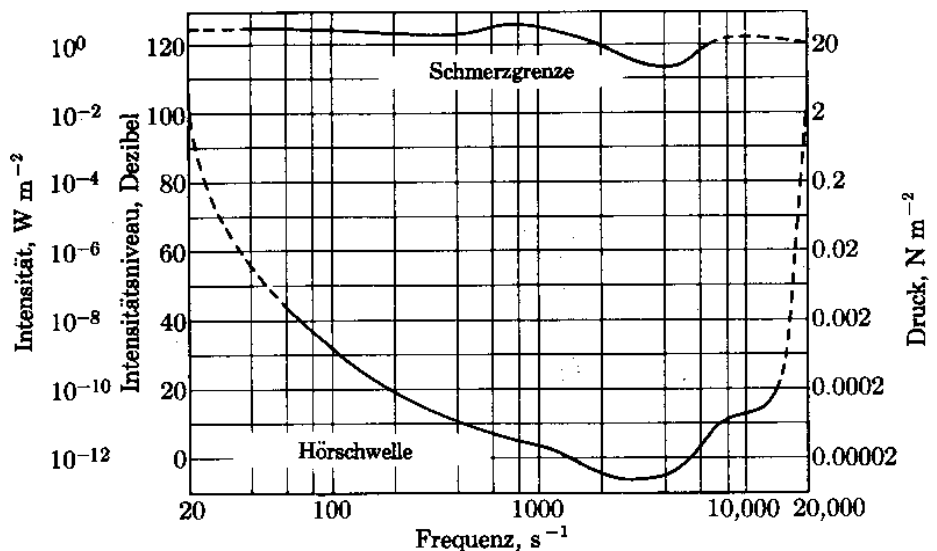
Moden existieren in jedem schwingungsfähigen System. Im Bild sind die Moden in einem Weinglas dargestellt, welche z.B. durch akustische Wellen angeregt werden können.



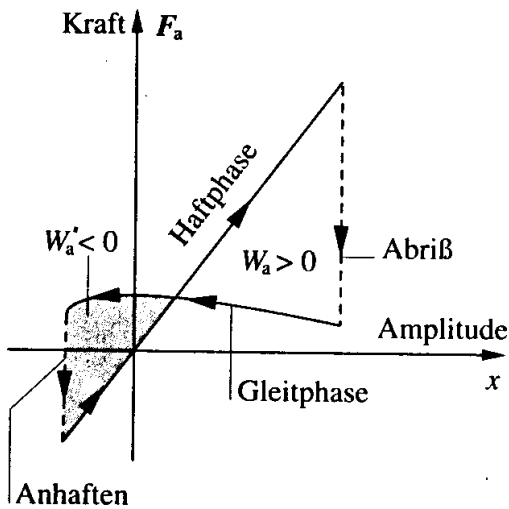
Akustische Schwingungen von Musikinstrumenten

Dreidimensionale Schwingungen in kontinuierlichen Medien sind z.B. akustische Schwingungen in Musikinstrumenten.

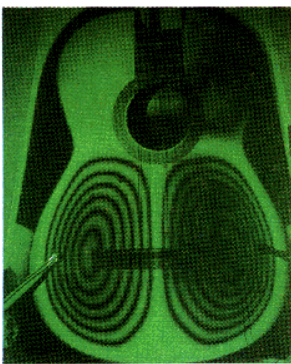
Akustische Schwingungen sind hörbar, wenn sie sich in einem Frequenzbereich von ca. 20 Hz bis 20 kHz befinden.



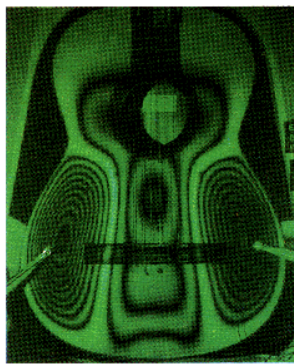
Versuch: Hörgrenze



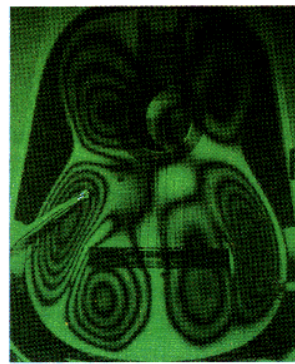
Schwingungen können in Musikinstrumenten ähnlich wie in den gezeigten Membranen angeregt werden. Etwas genauer betrachtet gibt es beim Anstreichen einer Saite einen periodischen Wechsel von Phasen bei denen der Bogen auf der Saite anhaftet und dann schnell zurück gleitet. Der Umlaufsinn der beiden Beiträge zur Hystereseschleife ist unterschiedlich. Die gesamte an der Saite geleistete Arbeit ist positiv ($W_a - W'_a > 0$). Diese Energie facht die Schwingung an.



268 Hz ($Q = 52$)



553 Hz ($Q = 66$)



672 Hz ($Q = 61$)



1010 Hz ($Q = 80$)

Jedes Musikinstrument hat eine Reihe von Eigenschwingungen. Zwar können z.B. bei einer Geige alle Töne erzeugt werden, doch werden nicht alle gleich gut wiedergegeben. Die Kombination der Eigenmoden ist für den Klang eines Instrumentes verantwortlich. Wie eine Geige oder Gitarre gebaut werden muss, war deshalb lange Zeit ein kaum nachvollziehbares Geheimnis der Instrumentenbauer. Nicht nur die Form des Instrumentes ist wichtig, da sie die Lage der Moden bestimmt, sondern auch das Material, welches z.B. die Dämpfung und damit die Breite der Resonanzen mitbestimmt.

Folie: Musikinstrumente

Allgemein gilt, dass mit größeren Instrumenten tiefere Töne erreicht werden können. Dieser Zusammenhang wird ebenfalls im Kapitel 5 Wellen noch diskutiert.